

4. 要得到函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 可以将函数 $g(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{12})$ 的图象

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
B. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位
C. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位
D. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

5. 某玻璃制品厂需要生产一种如图 1 所示的玻璃杯, 该玻璃杯造型可以近似看成是一个圆柱挖去一个圆台得到, 其近似模型的直观图如图 2 所示(图中数据单位为 cm), 则该玻璃杯近似模型的体积(单位: cm^3) 为



图1

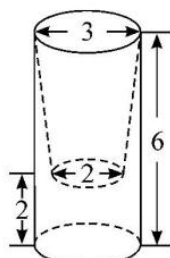


图2

- A. $\frac{43\pi}{6}$
B. $\frac{47\pi}{6}$
C. $\frac{51\pi}{6}$
D. $\frac{55\pi}{6}$

6. 某企业在生产中为倡导绿色环保的理念, 购入污水过滤系统对污水进行过滤处理, 已知在过滤过程中污水中的剩余污染物数量 $N(\text{mg/L})$ 与时间 $t(\text{h})$ 的关系为 $N = N_0 e^{-kt}$, 其中 N_0 为初始污染物的数量, k 为常数. 若在某次过滤过程中, 前 2 个小时过滤掉了污染物的 30%, 则可计算前 6 小时共能过滤掉污染物的

- A. 49%
B. 51%
C. 65.7%
D. 72.9%

7. 过双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的一条切线, 设切点为

T , 该切线与双曲线 E 在第一象限交于点 A , 若 $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FT}$, 则双曲线 E 的离心率为

- A. $\sqrt{3}$
B. $\sqrt{5}$
C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

8. 已知 A, B, C, D 是半径为 $\sqrt{5}$ 的球体表面上的四点, $AB = 2$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$, 则平面 CAB 与平面 DAB 的夹角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 四个实数 $-1, 2, x, y$ 按照一定顺序可以构成等比数列,则 xy 的可能取值有

- A. $-\frac{1}{8}$ B. -2 C. -16 D. -32

10. 直线 $y = kx - k$ 过抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点且与该抛物线交于 M, N 两点,设 O 为坐标原点,则下列说法中正确的是

- A. $p = 1$ B. 抛物线 E 的准线方程是 $x = -1$
C. 以 MN 为直径的圆与定直线相切 D. $\angle MON$ 的大小为定值

11. 已知实数 a, b 满足 $ae^a = b \ln b = 3$, 则

- A. $a = \ln b$ B. $ab = e$ C. $b - a < e - 1$ D. $e + 1 < a + b < 4$

12. 若函数 $f(x) = \cos 2x - \cos x + k$ 存在连续四个相邻且依次能构成等差数列的零点,则实数 k 的可能取值有

- A. -2 B. $\frac{9}{8}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. $(x+1)(1-2x)^5$ 的展开式中含 x^3 项的系数为_____.

14. 圆心在直线 $x + y - 1 = 0$ 上且与直线 $2x - y - 1 = 0$ 相切于点 $(1, 1)$ 的圆的方程是_____.

15. 若函数 $f(x) = (2x + 1) \ln x - ax$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数,则实数 a 的最大值为_____.

16. 甲,乙,丙三人进行传球游戏,每次投掷一枚质地均匀的正方体骰子决定传球的方式:当球在甲手中时,若骰子点数大于3,则甲将球传给乙,若点数不大于3,则甲将球保留;当球在乙手中时,若骰子点数大于4,则乙将球传给甲,若点数不大于4,则乙将球传给丙;当球在丙手中时,若骰子点数大于3,则丙将球传给甲,若骰子点数不大于3,则丙将球传给乙. 初始时,球在甲手中,投掷 n 次骰子后 ($n \in N^*$),记球在甲手中的概率为 p_n , 则 $p_3 =$ _____; $p_n =$ _____.(第一空2分,第二空3分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意正整数 n , 有 $2S_n = (n+2)(a_n - 1)$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{a_n + 1}{n + 1}\right\}$ 为常数列;

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $2a \cos B = 2c - b$.

(1) 求角 A ;

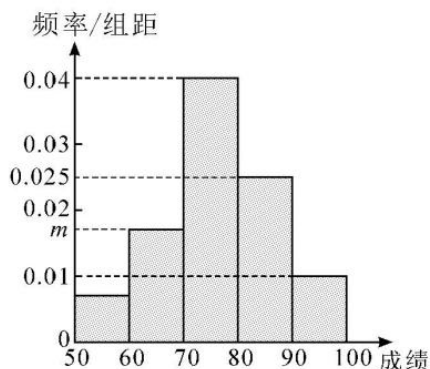
(2) 若 $a = 7$, 且 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r = \sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

19. (12 分)

近期世界地震、洪水、森林大火等自然灾害频繁出现, 紧急避险知识越来越引起人们的重视. 某校为考察学生对紧急避险知识的掌握情况, 从全校学生中选取 200 名学生进行紧急避险知识测试, 其中男生 110 名, 女生 90 名. 所有学生的测试成绩都在区间 $[50, 100]$ 范围内, 由测试成绩数据作出如图所示的频率分布直方图.

(1) 若从频率分布直方图中估计出样本的平均数与中位数相等, 求图中 m 的值;

(2) 规定测试成绩不低于 80 分为优秀, 已知共有 45 名男生成绩优秀, 完成下面的列联表, 并根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 能否推断男生和女生的测试成绩优秀率有差异?



性别	测试成绩		合计
	优秀	不优秀	
男生	45		
女生			
合计			

参考公式与数据: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

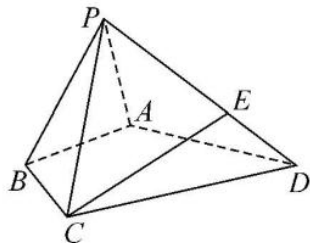
α	0.1	0.05	0.01
χ_α	2.706	3.841	6.635

20. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面四边形 $ABCD$ 满足 $AB = CB = \sqrt{2}$, $AD = CD = \sqrt{5}$, $\angle ABC = 90^\circ$, 棱 PD 上的点 E 满足 $PE = 2DE$.

(1) 证明: 直线 $CE \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 若 $PB = \sqrt{5}$, $PD = 2\sqrt{2}$, 且 $PA = PC$, 求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.



21. (12分)

椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 右顶点为 B , 满足 $|AB| = 4$, 且椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 已知点 $T(t, \frac{1}{2})$ 在椭圆 E 的内部, 直线 AT 和直线 BT 分别与椭圆 E 交于另外的点 C 和点 D , 若 $\triangle CDT$ 的面积为 $\frac{1}{17}$, 求 t 的值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = (x^2 + mx + n)e^x$.

(1) 若 $m = n = 0$, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $m = a + b + 2$, $n = a^2 + b^2 + 2$, 且 $f(x)$ 有两个极值点, 分别为 x_1 和 $x_2 (x_1 < x_2)$, 求

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{e^{x_2} - e^{x_1}}$ 的最小值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

