中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 3 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$B=\left\{y\middle|y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2-1}\right\}$，则 $A\cap B=$

A．$[2,3)$　　B．$(1,3)$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$(3,+\infty)$

2. 设 z 是纯虚数，若 $\frac{3+z}{1+\mathrm{i}}$ 是实数，则 z 的虚部为

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$，则"函数 $f(x)$ 是偶函数"是"$\varphi=-\frac{\pi}{3}$"的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4. 若圆 $(x-a)^2+(y-3)^2=20$ 上有四个点到直线 $2x-y+1=0$ 的距离为 $\sqrt{5}$，则实数 a 的取值范围是

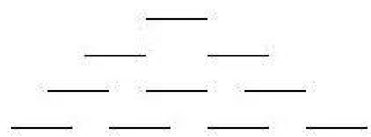
A．$\left(-\infty,-\frac{13}{2}\right)\cup\left(\frac{17}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\frac{13}{2},\frac{17}{2}\right)$

C．$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2},+\infty\right)$　　D．$\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$

5. 若 $7^n+C_{n+1}^1 7^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}7+C_{n+1}^n$ 是 9 的倍数，则自然数 n 为

A．4 的倍数　　B．3 的倍数　　C．奇数　　D．偶数

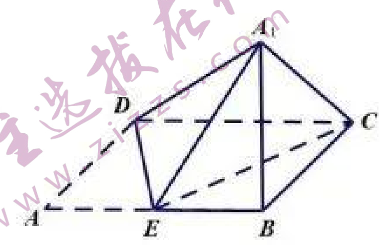
6. 现将 0-9 十个数字填入右方的金字塔中，要求每个数字都使用一次，第一行的数字中最大的数字为 a，第二行的数字中最大的数字为 b，第三行的数字中最大的数字为 c，第四行的数字中最大的数字为 d，则满足 $a<b<c<d$ 的填法的概率为



（第 6 题图）

A．$\dfrac{1}{10}$　　B．$\dfrac{1}{5}$　　C．$\dfrac{2}{15}$　　D．$\dfrac{2}{5}$

7．在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2AD=4$，E 是 AB 的中点，将 ΔADE 沿直线 DE 翻折成 ΔA_1DE，连接 A_1C．当二面角 A_1-DE-C 的平面角的大小为 $60°$ 时，则三棱锥 A_1-CDE 外接球的表面积为



（第 7 题图）

A．$\dfrac{56\pi}{3}$　　B．18π

C．19π　　D．$\dfrac{53\pi}{3}$

8．已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若集合 $A=\{x|2x^2<\log_a x\}$，$B=\left\{x\middle|y=\ln x+\ln\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\right\}$，且 $A\subsetneq B$，则实数 a 的取值范围是

A．$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(1,e^{\frac{1}{4e}}\right]$　　B．$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\cup\left[e^{\frac{1}{4e}},+\infty\right)$

C．$\left(\dfrac{1}{4},1\right)\cup\left(1,e^{\frac{1}{2e}}\right]$　　D．$\left(\dfrac{1}{4},1\right)\cup\left[e^{\frac{1}{2e}},+\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．设 $a>0,b>0$，满足 $3a+2b=1$，下列说法正确的是

A．ab 的最大值为 $\dfrac{1}{24}$　　B．$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 $8\sqrt{3}$

C．a^2+b^2 的最小值为 $\dfrac{1}{13}$　　D．$9a^2+4b^2$ 的最小值为 1

10．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_1+a_2+a_3=21$，$S_5=25$，下列说法正确的是

A．$a_n=2n+3$　　B．$S_n=-n^2+10n$

C．$\{S_n\}$ 的最大值为 S_5　　D．$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 10 项和为 $-\dfrac{10}{99}$

11．已知 ΔABC 的内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c，已知 $b=4,c=6$，ΔABC 的面积 S 满足 $(b+c)^2=\left(4\sqrt{3}+8\right)S+a^2$，点 O 为 ΔABC 的外心，满足 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则下列结论正确的是

A. $S=6$　　B. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AO}=10$　　C. $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　　D. $\lambda=2-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

12. 已知$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9y^2}{4}=1$上两个不同点，且满足$x_1x_2+9y_1y_2=-2$，则下列说法正确的是

A. $|2x_1+3y_1-3|+|2x_2+3y_2-3|$的最大值为$6+2\sqrt{5}$

B. $|2x_1+3y_1-3|+|2x_2+3y_2-3|$的最小值为$3-\sqrt{5}$

C. $|x_1-3y_1+5|+|x_2-3y_2+5|$的最大值为$2\sqrt{5}+\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

D. $|x_1-3y_1+5|+|x_2-3y_2+5|$的最小值为$10-2\sqrt{2}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知点M为抛物线$y^2=8x$上的动点，点N为圆$x^2+(y-4)^2=5$上的动点，则点M到y轴的距离与点M到点N的距离之和最小值为________.

14. 已知$f(x)$为$\mathbf{R}$上的偶函数，函数$h(x)=x^2f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，则不等式$(1-x)^2f(1-x)-(3+x)^2f(3+x)>0$的解集为________.

15. 用0,1,2,3,4,5这六个数字组成无重复数字的六位数，要求任意两个偶数数字之间至少有一个奇数数字，则符合要求的六位数的个数有________个.

16. 若关于x的不等式$e^x(2k-x)<x+3$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立，则整数k的最大值为______.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （10分）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{4}{9}$，$(3n+9)\cdot(n+1)^2a_{n+1}=(n+2)^3a_n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$\{a_n\}$的前n项和为S_n，证明：$S_n<\dfrac{5}{4}-\dfrac{2n+5}{4\cdot3^n}$.

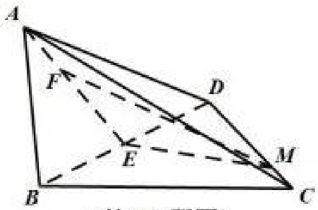
18. （12分）已知ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$2b\cos A-a=2c$.

（1）求角B；

（2）设$\angle ABC$的角平分线BD交AC于点D，若$BD=2$，求ΔABC的面积的最小值.

19. （12分）如图所示，在三棱锥$A-BCD$中，满足$BC=CD=3\sqrt{3}$，点M在CD上，且$DM=5MC$，ΔABD为边长为6的等边三角形，E为BD的中点，F为AE的三等分点，且$2AF=FE$.

（1）求证：$FM\parallel$面ABC；



（第19题图）

（2）若二面角 $A-BD-C$ 的平面角的大小为 $\frac{2\pi}{3}$，求直线 EM 与面 ABD 所成角的正弦值.

20. （12 分）为提高学生的数学应用能力和创造力，学校打算开设“数学建模”选修课，为了解学生对“数学建模”的兴趣度是否与性别有关，学校随机抽取该校 30 名高中学生进行问卷调查，其中认为感兴趣的人数占 70%.

（1）根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表判断是否有 85%的把握认为学生对“数学建模”选修课的兴趣度与性别有关？

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12		
女生		5	
合计			30

（2）若感兴趣的女生中恰有 4 名是高三学生，现从感兴趣的女生中随机选出 3 名进行二次访谈，记选出高三女生的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\ge k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. （12 分）已知双曲线 C 以 $2x\pm\sqrt{5}y=0$ 为渐近线，其上焦点 F 坐标为 $(0,3)$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）不平行于坐标轴的直线 l 过 F 与双曲线 C 交于 P,Q 两点，PQ 的中垂线交 y 轴于点 T，问 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 是否为定值，若是，请求出定值，若不是，请说明理由.

22. （12 分）设 $f(x)=\frac{x}{e^x}(x\in\mathbf{R})$.

（1）求 $f(x)$ 的单调性，并求 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处的切线方程；

（2）若 $(ex)\cdot f(x)\le k\cdot(\ln x+1)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，求 k 的取值范围.

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 3 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	D	C	C	A	B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对但不全的得 2 分，有错选的得 0 分．

9	10	11	12
AC	BCD	ABD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\sqrt{5}-2$　　14．$(-\infty,-1)$

15．108　　16．1

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）$\because (3n+9)\cdot(n+1)^2 a_{n+1}=(n+2)^3 a_n$

$\therefore \dfrac{3(n+3)a_{n+1}}{(n+2)^2}=\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}$

即 $\dfrac{(n+3)a_{n+1}}{(n+2)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}$ ……………………2 分

又 $\dfrac{(1+2)a_1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{3}$，所以数列 $\left\{\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{3}$，公比为 $\dfrac{1}{3}$ 的等比数列

从而 $\dfrac{(n+2)a_n}{(n+1)^2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，则 $a_n=\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot 3^n}$ ……………………5 分

（2）$\because a_n=\dfrac{(n+1)^2}{(n+2)\cdot 3^n}=\dfrac{n+1}{n+2}\cdot\dfrac{n+1}{3^n}<\dfrac{n+1}{3^n}$ ……………………6 分

$\therefore S_n<\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots+\dfrac{n+1}{3^n}$

设 $T_n=\dfrac{2}{3^1}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots+\dfrac{n+1}{3^n}$，则 $\dfrac{1}{3}T_n=\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{n+1}{3^{n+1}}$

两式相减得：

$$\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{9}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]-\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{2\cdot 3^{n+1}}$$ ……………………9 分

从而 $T_n=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot 3^n}$，故 $S_n<\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot 3^n}$ ……………………10 分

18.（12 分）

（1）由已知及正弦定理得：$2\sin B\cdot\cos A-\sin A=2\sin C$

又在 ΔABC 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ ……………………2 分

$\therefore 2\sin B\cos A-\sin A=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$

即 $2\sin A\cos B=-\sin A$

又 $\sin A\neq 0$，$\therefore \cos B=-\frac{1}{2}$ ……………………4 分

又 $0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$，即角 B 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$ ……………………5 分

（2）$\because S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$ ……………………6 分

BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，而 $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta BCD}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{1}{2}\times AB\times BD\times\sin 60°+\frac{1}{2}\times BD\times BC\times\sin 60°$

即 $\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot BD\cdot(a+c)$，$\therefore BD=\frac{ac}{a+c}$ ……………………8 分

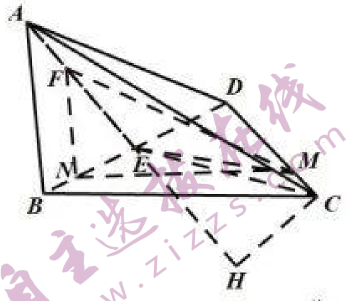
$\because BD=2$，$\therefore ac=2(a+c)$

$\because a+c\geq 2\sqrt{ac}$，$\therefore ac\geq 4\sqrt{ac}$，即 $ac\geq 16$ ……………………10 分

当且仅当 $a=c=4$ 时取等号，则 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B\geq\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16=4\sqrt{3}$

即 ΔABC 的面积的最小值为 $4\sqrt{3}$ ……………………12 分

19.（12分）



（1）在 BE 上取一点 N，使得 $BN=\frac{1}{2}NE$，连接 FN，NM

$\because BD=6$，$\therefore BN=\frac{1}{6}BD=1$，$NE=2$，$ED=3$

$\because \frac{AF}{FE}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{BN}{NE}=\frac{AF}{FE}=\frac{1}{2}$

则 $FN // AB$ ……………………………………………………………………2分

$\because FN\not\subset$ 面 ABC，$AB\subset$ 面 ABC，$\therefore FN //$ 面 ABC

$\because \frac{BN}{ND}=\frac{CM}{MD}=\frac{1}{5}$，$\therefore NM // BC$ ……………………………………………4分

$\because NM\not\subset$ 面 ABC，$BC\subset$ 面 ABC，$\therefore NM //$ 面 ABC

$\because FN\cap NM=N$，$\therefore$ 面 $FNM //$ 面 ABC

$\because FM\subset$ 面 FNM，$\therefore FM //$ 面 ABC ……………………………………………5分

（2）$\because AE\perp BD$，$CE\perp BD$

所以二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AEC=\frac{2\pi}{3}$ ……………………………………6分

又 $\because AE\cap CE=E$，$\therefore BD\perp$ 面 AEC

$\because BD\subset$ 面 ABD，$\therefore$ 面 $ABD\perp$ 面 AEC

$\because$ 面 $ABD\cap$ 面 $AEC=AE$，过点 C 作 $CH\perp AE$，则 $CH\perp$ 面 ABD

则 $CH=CE\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}CE$

$\because CE=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-3^2}=3\sqrt{2}$，$\therefore CH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ……………………8分

即 C 到面 ABD 的距离为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\because MD=\frac{5}{6}CD$，$\therefore M$ 到面 ABD 的距离为 $\frac{5}{6}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$ ……………………9分

计算 EM：$\cos\angle CDB=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

在 ΔDME 中，$DM=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$DE=3$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2+3^2-EM^2}{2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 3}\Rightarrow EM=\frac{\sqrt{51}}{2}$$ ……………………………… 11 分

$\therefore EM$ 与面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\frac{5\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{51}}{2}}=\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$ ……………………………… 12 分

（其他方法酌情给分）

20.（12 分）

（1）列联表如下：

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12	4	16
女生	9	5	14
合计	21	9	30

……………………………… 2 分

$$K^2=\frac{30\times(12\times5-4\times9)^2}{16\times14\times21\times9}\approx 0.4082<2.072$$

所以没有 85%的把握认为学生对“数学建模”选修课的兴趣度与性别有关 ……5 分

（2）由题意可知 X 的取值可能为 0，1，2，3

则 $P(X=0)=\dfrac{C_5^3}{C_9^3}=\dfrac{5}{42}$ ……………………………… 6 分

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\dfrac{10}{21}$ ……………………………… 7 分

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\dfrac{5}{14}$ ……………………………… 8 分

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{1}{21}$ ……………………………… 9 分

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$ ………………………… 12 分

21．（12 分）

（1）因为双曲线 C 以 $2x\pm\sqrt{5}y=0$ 为渐近线

设双曲线方程为 $(2x+\sqrt{5}y)(2x-\sqrt{5}y)=\lambda$，即 $4x^2-5y^2=\lambda$ ………………1 分

$\because F(0,3)$，$\therefore \lambda<0$，即：$\frac{y^2}{-\frac{\lambda}{5}}-\frac{x^2}{-\frac{\lambda}{4}}=1$

$\therefore -\frac{\lambda}{5}-\frac{\lambda}{4}=9$，$\therefore -\frac{9\lambda}{20}=9$，即 $\lambda=-20$ ………………………………3 分

所以双曲线 C 的方程为：$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ ………………………………4 分

（2）设直线 $l: y=kx+3$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

$\begin{cases}5y^2-4x^2=20\\ y=kx+3\end{cases}\rightarrow 5(kx+3)^2-4x^2=20$

化简得：$(5k^2-4)x^2+30kx+25=0$ ………………………………6 分

此方程的两根为 x_1,x_2，则 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{30k}{5k^2-4}\\ x_1x_2=\frac{25}{5k^2-4}\end{cases}$

$\therefore |PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{900k^2}{(5k^2-4)^2}-\frac{100}{5k^2-4}}=10\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{9k^2-(5k^2-4)}{(5k^2-4)^2}}$

$=10\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{4k^2+4}{(5k^2-4)^2}}=\frac{20(k^2+1)}{|5k^2-4|}$ ………………………………8 分

PQ 中点 M 坐标为 $\left(-\frac{15k}{5k^2-4},\frac{-12}{5k^2-4}\right)$ ………………………………9 分

$\therefore PQ$ 中垂线方程为：$y+\frac{12}{5k^2-4}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{15k}{5k^2-4}\right)$

令 $x=0$，$\therefore y=\frac{-27}{5k^2-4}$，$\therefore T\left(0,\frac{-27}{5k^2-4}\right)$

则$|TF|=\left|3+\dfrac{27}{5k^2-4}\right|=\left|\dfrac{15k^2+15}{5k^2-4}\right|$ ……………………………………………… 11 分

$\therefore\dfrac{|TF|}{|PQ|}=\dfrac{\left|\dfrac{15k^2+15}{5k^2-4}\right|}{\dfrac{20\left(k^2+1\right)}{\left|5k^2-4\right|}}=\dfrac{3}{4}$ ……………………………………………………………… 12 分

22.（12 分）

（1）令$f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}>0$ …………………………………………………………… 1 分

$\therefore x<1$，即函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1)$，函数$f(x)$的单调递减区间为$(1,+\infty)$

…………………………………………… 2 分

当$x=\dfrac{1}{2}$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$，$\therefore$切点为$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\right)$

$\therefore f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$，$\therefore f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$处的切线方程为：

$y-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$ …………………………………………… 4 分

（2）$\dfrac{ex^2}{e^x}\le k\cdot(\ln x+1)$，$\dfrac{x}{e^x}\le k\cdot\dfrac{\ln x+1}{ex}=k\cdot\dfrac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}$

$\because x\in(1,+\infty)$，$\therefore\dfrac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}>0$，$\therefore k\ge\dfrac{\frac{x}{e^x}}{\frac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}}$ …………………………………………………… 6 分

由（1）可知$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$在$(1,+\infty)$上单调递减，下证：$x>\ln x+1$

即证：$x-\ln x>1$在$x\in(1,+\infty)$恒成立

令$g(x)=x-\ln x$，则$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$

$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增

又$\because x>1$，$\therefore g(x)>g(1)=1-\ln 1=1$ …………………………………………………… 9 分

$\therefore x>\ln x+1>1$

$\because f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore f(x)<f(\ln x+1)$，即 $\frac{x}{e^x}<\frac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}$，$\therefore \frac{\frac{x}{e^x}}{\frac{\ln x+1}{e^{\ln x+1}}}<1$ ………………………… 11 分

$\therefore k\geq 1$ ……………………………………………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。