

2023-2024 学年上学期

东北师大附中

(数学) 科试卷

高三年级第一次摸底考试

注意事项:

1. 答题前, 考生须将自己的姓名、班级、考场/座位号填写在答题卡指定位置上, 并粘贴条形码。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。
3. 回答非选择题时, 请使用 0.5 毫米黑色字迹签字笔将答案写在答题卡各题目的答题区域内, 超出答题区域或在草稿纸、本试题卷上书写的答案无效。
4. 保持卡面清洁, 不要折叠、不要弄皱、弄破, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $Q = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$ , 则  $P \cap Q =$

- A.  $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$       B.  $\{-1, 0, 1\}$       C.  $\{0, 1\}$       D.  $\{-1, 0\}$

2. 已知条件  $p: \frac{1}{x} < 1$ , 条件  $q: x^2 + x - 6 > 0$ , 则  $p$  是  $q$  的

- A. 充要条件      B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件      D. 既不充分也不必要条件

3. 方程  $\log_3 x + x = 2$  的根所在区间是

- A. (0,1)      B. (1,2)      C. (2,3)      D. (3,4)

4. 函数  $f(x) = \cos 2x$  在点  $P(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$  处的切线斜率是

- A. -2      B. 2      C. -1      D. 1

5. 若  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , 且  $a > b$ , 则下列不等式一定成立的是

- A.  $ac > bc$       B.  $ac^2 > bc^2$       C.  $(b-a)c^2 < 0$       D.  $(a-b)c^2 \geq 0$

师大附中高三第一次摸底考

官方微信公众号: zizzsw

官方网站: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)

咨询热线: 010-5601 9830

微信客服: zizzs2018

6. 8月29日, 华为在官方网站发布了 Mate60 手机, 其中大部分零件已实现国产化, 5G 技术

更是遥遥领先, 5G 技术的数学原理之一便是著名的香农公式:  $C = W \log_2(1 + \frac{S}{N})$ , 它表示:

在受噪声干扰的信道中, 最大信息传递速度  $C$  取决于信道带宽  $W$ , 信道内信号的平均功率  $S$

以及信道内部的高斯噪声功率  $N$  的大小, 其中  $\frac{S}{N}$  叫做信噪比. 当信噪比较大时, 公式中

真数中的 1 可以忽略不计. 按照香农公式, 若不改变带宽  $W$ , 而将信噪比从 1000 提升至 5000, 则  $C$  大约增加了 (参考数值:  $\lg 2 \approx 0.301$ )

- A. 43%                      B. 33%                      C. 23%                      D. 13%

7. 下列函数中, 即是奇函数又是增函数的是

- A.  $f(x) = -x^3$                       B.  $f(x) = x^3 - x$   
C.  $f(x) = 2^x - 2^{-x}$                       D.  $f(x) = \ln|x+1| + \ln|x-1|$

8. 定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  的导函数记作  $f'(x)$ , 满足  $f'(x) - f(x) > 3e^x$ ,  $f(2) = 6e^2$ , 则不等式  $f(x) > 3xe^x$  的解集为

- A.  $(2, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 2)$                       C.  $(3, +\infty)$                       D.  $(-\infty, 3)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设  $a, b$  为正实数, 则下列不等式正确的是

- A.  $\frac{ab}{a+b} \geq \frac{a+b}{4}$                       B.  $(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b}) \geq 4$   
C.  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$                       D.  $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} < a+b$

10. 已知  $f(x) = \begin{cases} x-1, & (x \geq 0) \\ \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}$ , 下列说法正确的是

A.  $f(x)=1$  时,  $x=2$

B. 若方程  $f(x)=a$  有两个根, 则  $-1 \leq a < 0$

C. 若直线  $kx+y-k-1=0$  与  $y=f(x)$  有两个交点, 则  $k \geq 2$  或  $0 < k < 1$

D. 函数  $g(x)=f(f(x))+1$  有 3 个零点

11. 已知  $a+3^a = b+5^b = 3$ , 则下列不等关系正确的是

A.  $0 < a < b < 1$

B.  $0 < b < a < 1$

C.  $b+3^a < a+5^b$

D.  $b \ln a > a \ln b$

12. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ , 并且对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 都有  $f(-x) = f(x+2) = -f(2-x)$ ,

则下列说法正确的是

A.  $y=f(x)$  的图象关于  $x=1$  对称

B. 函数  $f(x)$  为偶函数

C.  $\sum_{k=1}^{2024} f(k) = 0$

D. 若  $x \in (0,1)$  时,  $f(x) = \log_2(x+1)$ , 则  $x \in (3,4)$  时,  $f(x) = -\log_2(5-x)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数  $f(x) = e^x + x$  在  $x=0$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

14. 若  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + 2x - 1$  在  $(1,2)$  内存在极值, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 已知  $m > 1, n > 0$ ,  $m^2 - 3m + n = 0$ , 则  $\frac{4}{m-1} + \frac{m}{n}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 不等式  $xe^x + \frac{a \ln x}{x^a} \geq 0$  ( $a < 0$ ) 对  $\forall x \in (1, +\infty)$  都成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，对于  $\forall x, y \in (0, +\infty)$ ， $f(xy) = f(x) + f(y)$ ，且当  $x > 1$  时， $f(x) < 0$ 。

(1) 证明： $f(x)$  为减函数；

(2) 若  $f(\frac{1}{2}) = 2$ ，求不等式  $f(x) + f(x-1) + 2 > 0$  的解集。

18. (12分)

已知各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  满足： $a_1 = 2$ ， $a_{n+1}^2 = a_n(a_{n+1} + 2a_n)$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 若  $b_n = 1 + a_n \cdot \sin \frac{n\pi}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，记数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ，求  $T_{2024}$ 。

19. (12分)

吉林省从2021年开始，高考取消文理分科，实行“3+1+2”的模式，其中的“1”表示每位学生必须从物理、历史中选择且只能选择一个科目。某校高一年级有2000名学生（其中女生900人）。该校为了解高一年级学生对物理、历史的选科情况，采用比例分配的分层抽样的方法抽取了200名学生进行问卷调查，其中选择历史的男生有40人，选择物理的女生有30人。

(1) 利用以上信息完成下面的  $2 \times 2$  列联表，根据小概率值  $\alpha = 0.005$  的独立性检验，能否认为学生性别与选择科目有关？

性别	选择物理	选择历史	总计
男生			
女生			
总计			

(2) 某个外语学习小组共有7人，其中有3人选择了历史，4人选择了物理，随机抽取4人进行对话练习，用  $X$  表示抽中的4人中，选择历史的同学人数，求  $X$  的分布列及期望。

附:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a+b+c+d$

$\alpha$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
$k_0$	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20. (12分)

长方形  $ABCD$  中,  $AB = 2AD = 2\sqrt{2}$ , 点  $E$  为  $CD$  中点 (如图 1), 将点  $D$  绕  $AE$  旋转至点  $P$  处, 使平面  $PAE \perp$  平面  $ABCE$  (如图 2).

(1) 求证:  $PA \perp PB$ ;

(2) 点  $F$  在线段  $PD$  上, 当二面角  $F-AE-P$  大小为  $\frac{\pi}{4}$  时, 求四棱锥  $F-ABCE$  的体积.

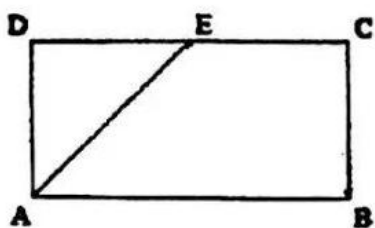


图 1

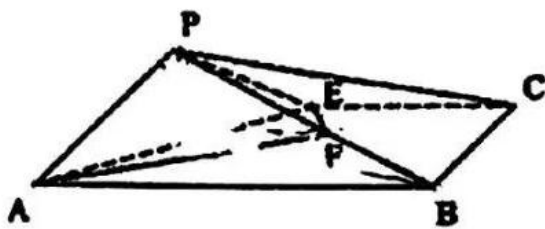


图 2

21. (12分)

椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 过椭圆焦点并且垂直于长轴的弦长度为 1.

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $A, B$  两点, 与  $y$  轴相交于  $M(0, m)$  点, 若存在实数  $m$ , 使得

$\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OM}$ , 求  $m$  的取值范围.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln x - kx + 1$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性:

(2) 若函数  $g(x) = \frac{e^x}{ax}$ , 求证: 当  $a \in (0, \frac{e^2}{2}]$  时,  $g(x) > f(x) + kx - 1$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线