荆门市 2022—2023 学年度下学期期末
高二年级学业水平检测
数　学

本试卷共 4 页，共 22 题。满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填在答题卡上.

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在试题卷上无效.

3. 填空题和解答题答在答题卡上每题对应的答题区域内，答在试题卷上无效.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知直线 $l_1: 3x-\sqrt{3}y+1=0$，若直线 l_2 与 l_1 垂直，则 l_2 的倾斜角是（▲）

A. $150°$　　B. $120°$　　C. $60°$　　D. $30°$

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_5=20$，$a_2=5$，则公差为（▲）

A. 3　　B. -3　　C. 1　　D. -1

3. 对于数据组 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,\dots,n)$，如果由经验回归方程得到的对应自变量 x_i 的估计值是 $\hat{y}_i$，那么将 $y_i-\hat{y}_i$ 称为对应点 (x_i,y_i) 的残差．某学校利用实践基地开展劳动教育活动，在其中一块土地上栽种某种蔬菜，并指定一位同学观测其中一棵幼苗生长情况，该同学获得前 6 天的数据如下：

第 x 天	1	2	3	4	5	6
高度 $y(\text{cm})$	1	4	7	9	11	13

经这位同学的研究，发现第 x 天幼苗的高度 $y(\text{cm})$ 的经验回归方程为 $\hat{y}=2.4x+\hat{a}$，据此计算样本点 $(5,11)$ 处的残差为（▲）

A. 0.1　　B. -0.1　　C. 0.9　　D. -0.9

4. 从 1，2，3，4，5 中随机选取三个不同的数，若这三个数之积为偶数，则它们之和不小于 10 的概率为（▲）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$

5. 编号为 1，2，3，4，5 的五位同学，分别就座于编号为 1，2，3，4，5 的五个座位上，每位座位恰好坐一位同学，则恰有两位同学的编号和座位编号一致的坐法种数为（▲）

A. 20　　B. 45　　C. 40　　D. 90

6. 正整数 1，2，3，…，n 的倒数的和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 已经被研究了几百年，但是迄今为止仍然没有得到它的求和公式，只是得到了它的近似公式：当 n 很大 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma$．其中 γ 称为欧拉—马歇罗尼常数，$\gamma\approx0.577215664901\cdots$，至今为止都不确定 γ 是有理数还是无理数．设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．用上式计算 $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2023}]$

的值为（▲）（参考数据：$\ln 2\approx 0.69,\ln 3\approx 1.10,\ln 10\approx 2.30$）

A．7　　　　B．8　　　　C．9　　　　D．10

7．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 作斜率为 $k\left(k>0\right)$ 直线 l 与抛物线交于 A、B 两点，与抛物线的准线的相交于点 C．若 B 为 AC 的中点，则 $k=$（▲）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　B．$\sqrt{2}$　　　　C．2　　　　D．$2\sqrt{2}$

8．设函数 $f(x)$ 在定义域 R 上满足 $f(-x)+f(x)=0$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，且 $f(-1)=0$，则不等式 $f\left(\ln x\right)<0$ 的解集为（▲）

A．$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(e,+\infty\right)$　　　　B．$(0,1)\cup(1,e)$

C．$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup\left(1,e\right)$　　　　D．$\left(\dfrac{1}{e},1\right)\cup\left(e,+\infty\right)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AA_1}(m,n\in(0,1])$，则（▲）

A．$AQ\perp BD$

B．BD_1 与平面 QAC 所成角为 $45°$

C．当点 Q 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内时，$n=1$

D．当 $n=\dfrac{1}{2}$ 时，四棱锥 $Q-ABB_1A_1$ 的体积为定值

10．已知一组 $2n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 个数据：a_1，a_2，…，a_{2n}，满足：$a_1\le a_2\le\cdots\le a_{2n}$，中位数是 M，平均数为 N，方差为 s^2，则（▲）

A．$a_n\le M\le a_{n+1}$

B．$a_n\le N\le a_{n+1}$

C．函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{2n}\left(x-a_i\right)^2$ 的最小值为 $2ns^2$

D．若 a_1，a_2，…，a_{2n} 成等差数列，则 $M=N$

11．已知 P 是圆 $O:x^2+y^2=4$ 上任意一点，定点 A 在 x 轴上，线段 AP 的垂直平分线与直线 OP 相交于点 Q，当 P 在圆 O 上运动时，Q 的轨迹可以是（▲）

A．圆　　　　B．椭圆　　　　C．双曲线　　　　D．抛物线

12．若直线 $x=a$ 与两曲线 $y=e^x$，$y=\ln x$ 分别交于 A，B 两点，且曲线 $y=e^x$ 在 A 点处的切线为 m，曲线 $y=\ln x$ 在 B 点处的切线为 n，则下列结论正确的有（▲）

A．存在 $a\in(0,+\infty)$，使 $m\,//\,n$

B．当 $m\,//\,n$ 时，$|AB|$ 取得最小值

C．$|AB|$ 没有最小值

D．$|AB|>\ln 2+\log_2 e$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知随机变量 $X\sim B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，则 $D(2X-1)=$___▲___.

14．写出一条与直线 $2x+y+1=0$ 平行且与圆 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 相切的直线方程___▲___.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-2$，且 $a_{n+1}=\dfrac{4}{2-a_n}$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{2023}=$___▲___.

16．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，左顶点是 A，左、右焦点分别是 F_1，F_2，M 是 C 在第一象限上的一点，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N．若 $MF_2 \parallel AN$，且 $\triangle ANF_2$ 的周长为 $\dfrac{19}{6}a$，则直线 MN 的斜率为___▲___.

四、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

已知 $A_n^4=40C_n^5$，设 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$．

（1）求 n 的值；

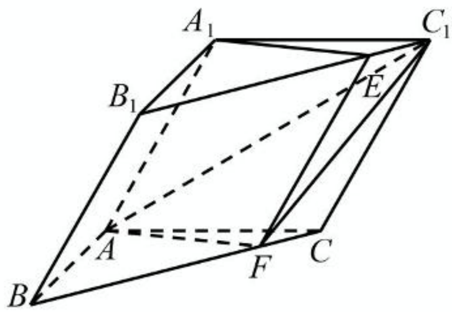
（2）求 $f(x)$ 的展开式中的有理项.

18．（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，面 $ABC\perp$ 面 AA_1C_1C，$AB\perp AC$，$AA_1=AB=AC=2$，$\angle A_1AC=60^\circ$．过 AA_1 的平面交线段 B_1C_1 于点 E（不与端点重合），交线段 BC 于点 F．

（1）求证：四边形 AA_1EF 为平行四边形；

（2）若 $BF=3FC$，求直线 A_1C_1 与平面 AFC_1 所成角的正弦值.



19．（本小题满分 12 分）

新能源汽车是中国战略新兴产业之一，政府高度重视新能源产业的发展．某企业为了提高新能源汽车品控水平，需要监控某种型号的汽车零件的生产流水线的生产过程．现从该企业生产的该零件中随机抽取 100 件，测得该零件的质量差（这里指质量与生产标准的差的绝对值）的样本数据统计如下表.

质量差（单位：mg）	56	67	70	78	86
件数（单位：件）	10	20	48	19	3

（1）求样本平均数 $\overline{x}$ 的值；根据大量的产品检测数据，得到该零件的质量差 X 近似服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 $\sigma^2=36$，用样本平均数 $\overline{x}$ 作为 μ 的近似值，求概率 $P\left(64<X<82\right)$ 的值；

（2）若该企业有两条生产该零件的生产线，其中第 1 条生产线的生产效率是第 2 条生产线的生产效率的两倍．若第 1 条生产线出现废品的概率约为 0.015，第 2 条生产线出现废品的概率约为 0.018，将这两条生产线生产出来的零件混放在一起，这两条生产线是否出现废品相互独立．现从该企业生产的该零件中随机抽取一件，求该零件为废品的概率．

参考数据：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi\le\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi\le\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<\xi\le\mu+3\sigma)=0.9973$．

20．（本小题满分 12 分）

已知各项均为正数的数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}^2-2S_n=n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中 S_n 是数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和．

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）在 a_k 和 $a_{k+1}\left(k\in N^*\right)$ 中插入 k 个相同的数 $\left(-1\right)^{k+1}\cdot k$，构成一个新数列 $\left\{b_n\right\}$：a_1，1，a_2，-2，-2，a_3，3，3，3，a_4，…，求 $\left\{b_n\right\}$ 的前 100 项和 T_{100}．

21．（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的实轴长为 2，两渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$．

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）当 $a<b$ 时，记双曲线 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，动直线 $l:x=my+2$ 与双曲线 C 的右支交于 M，N 两点（异于 A_2），直线 A_1M，A_2N 相交于点 T，证明：点 T 在定直线上，并求出定直线方程．

22．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x+1-2a)\ln(x-a)$．

（1）当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $x\geqslant a+1$ 时，$f(x)\geqslant x-1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．