2023—2024—1 月考 1
参考答案

一、选择题：共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	D	D	B	A	B	D	B	B	C	B	A	A

1.【答案】D

【解析】根据题意可得，$\bar{z}=a-\mathrm{i}$，所以$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+1}=1$，解得$a=0$，所以复数$z=\mathrm{i}$．

2.【答案】D

【解析】$A=\left\{\theta\in(0,\pi)\middle|\frac{1}{2}<\sin\theta\leq 1\right\}=\left\{\theta\middle|\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}\right\}$，$A\cap B=\left\{\theta\middle|\frac{\pi}{4}<\theta<1\right\}$．

3.【答案】B

【解析】由“$p\wedge q$为假”得出p，q中至少一个为假．当p，q为一假一真时，$p\vee q$为真，故不充分；当“$p\vee q$为假”时，p，q同时为假，所以$p\wedge q$为假，所以是必要的，所以选B.

4.【答案】A

【解析】将函数$y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，

可得$y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$的图象，所以$\varphi=0$．

5.【答案】B

【解析】由题意可知，构成一个以首项为 70 缗，末项为 31 缗，项数为 40 层，公差为 1 的等差数列，

则和为$S=\frac{40\times(70+31)}{2}=2020$缗，这一堆铜钱的数量为$2020\times 1000=2.02\times 10^6$枚.

6.【答案】D

7.【答案】B

8.【答案】B　【解析】排除易得.

9.【答案】C

【详解】记甲、乙两人各射击一次的得分之和为X，

则$P(X=2)=\frac{3}{5}\times(1-p)+\left(1-\frac{3}{5}\right)p=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}p=\frac{9}{20}$，解得：$p=\frac{3}{4}$．故选：C.

10.【答案】B

【解】设$h(x)$上一点$M(x_0,2\ln x_0)$，$\frac{1}{e}\leq x_0\leq e$，且$M$关于$x$轴对称点坐标为$M'(x_0,-2\ln x_0)$，$\frac{1}{e}\leq x_0\leq e$在$g(x)$上，

$\therefore -2\ln x_0=a-x_0^2\left(\frac{1}{e}\leq x\leq e\right)$有解，即$x_0^2-2\ln x_0=a\left(\frac{1}{e}\leq x\leq e\right)$有解.

令$f(x)=x^2-2\ln x\left(\frac{1}{e}\leq x\leq e\right)$，则$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$，$\frac{1}{e}\leq x\leq e$，

$\therefore$当$x\in\left[\frac{1}{e},1\right)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,e]$时，$f'(x)>0$，

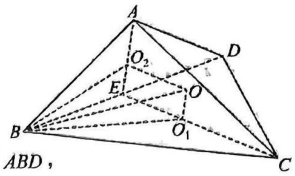
$\therefore f(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right)$上单调递减；在$(1,e]$上单调递增

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}+2$，$f(e)=e^2-2$，

$x_0^2-2\ln x_0=a\left(\frac{1}{e}\leq x\leq e\right)$有解等价于$y=a$与$y=f(x)$图象有交点，

$\therefore f(1)\leq a\leq f(e)$　$\therefore a\in\left[1,e^2-2\right]$．故选：$B$

11.【答案】A



【解析】设$\triangle ABD$外心为O_2，$\triangle BCD$外心为O_1，DB中点为E.

因$O_1E\perp DB$，$O_1E\subset$平面BCD，平面$ABD\perp$平面BCD，

平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，则$O_1E\perp$平面ABD，又$O_2E\subset$平面ABD，

则$O_1E\perp O_2E$.过O_2，O_1分别作平面ABD，平面BCD垂线，则垂线交点O为外接球球心，

则四边形O_2EO_1O为矩形.$\triangle BCD$外接圆半径$r_1=O_1B=\dfrac{BD}{2\sin 60^\circ}=2$.

又因$AB=AD=2$，$BD=2\sqrt{3}$，则$\angle BAD=120^\circ$.故$\triangle ABD$外接圆半径$r_2=O_2B=\dfrac{BD}{2\sin 120^\circ}=2$.

又$OO_1=O_2E=\sqrt{O_2B^2-EB^2}=\sqrt{4-3}=1$.

又$OO_1\perp$平面BCD，$BO_1\subset$平面BCD，则$OO_1\perp BO_1$.

故外接球半径$R=OB=\sqrt{OO_1^{\,2}+BO_1^{\,2}}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，故外接球表面积为$4\pi R^2=20\pi$.故选：A

12.【答案】A

【解析】由$e^x+x+e=0$得$e^x=-x-e$，由$\ln x+x+\mathrm{e}=0$得$\ln x=-x-e$，

因为$y=\mathrm{e}^x$与$y=\ln x$互为反函数，所以两函数图象关于$y=x$对称，所以$p+q=-e$，

故$f(x)=e^x+(p+q)x=e^x-ex$，则$f'(x)=e^x-e$，

令$f'(x)>0$，得$x>1$；令$f'(x)<0$，得$x<1$；

所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故$f\left(\dfrac{2}{3}\right)<f(0)$，

而$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}e$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right)=e^{\frac{4}{3}}-\dfrac{4}{3}e$，

则$f\left(\dfrac{4}{3}\right)-f(0)=e^{\frac{4}{3}}-\dfrac{4}{3}e-1$，$f\left(\dfrac{4}{3}\right)-f\left(\dfrac{2}{3}\right)=e^{\frac{4}{3}}-\dfrac{4}{3}e-\left(e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}e\right)=e^{\frac{4}{3}}-e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}e$，

令$g(x)=x^{\frac{4}{3}}-\dfrac{4}{3}x-1\ (x\ge e)$，则$g'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{4}{3}\ge\dfrac{4}{3}e^{\frac{1}{3}}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4}{3}\left(e^{\frac{1}{3}}-1\right)>0$，

所以$g(x)$在$[e,+\infty)$上单调递增，

所以$g(e)<g(3)=3^{\frac{4}{3}}-5<0\left(3^4=81<125=5^3\right)$，即$e^{\frac{4}{3}}-\dfrac{4}{3}e-1<0$，故$f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f(0)$，

令$h(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}x\ (x\ge 1)$，则$h'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}$，

令$h'(x)>0$，得$x>1$，所以$h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

所以$h(\mathrm{e})>h\left(\dfrac{27}{10}\right)=\left(\dfrac{27}{10}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\dfrac{27}{10}\right)^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{27}{10}\right)=\dfrac{81}{10^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{9}{10^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{18}{10}$

$$=\frac{81\times 10^{\frac{2}{3}}-90\times 10^{\frac{1}{3}}-180}{100}=\frac{9}{100}\left[10^{\frac{1}{3}}\left(9\times 10^{\frac{1}{3}}-10\right)-20\right]$$

$$>\frac{9}{100}\left[2.15(9\times 2.15-10)-20\right]=\frac{9}{100}\times 0.1025>0\left(10>2.15^3\right),$$

则$e^{\frac{4}{3}}-e^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}e>0$，故$f\left(\dfrac{4}{3}\right)>f\left(\dfrac{2}{3}\right)$，

综上：$f\left(\dfrac{2}{3}\right)<f\left(\dfrac{4}{3}\right)<f(0)$. 故选：A.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【答案】-24

14.【答案】$-\frac{3\pi}{4}$

15.【答案】$-\frac{7}{3}$

16.【答案】$(2,+\infty)$

【解析】整理得 $4c^2=3a_1^2+a_2^2$，即 $\frac{3}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=4$，设 $t_1=e_1^2, t_2=e_2^2$，则有 $0<t_1<1<t_2$，$\frac{3}{t_1}+\frac{1}{t_2}=4$，

所以 $\frac{1}{t_2}=4-\frac{3}{t_1}=\frac{4t_1-3}{t_1}$，即有 $t_2=\frac{t_1}{4t_1-3}>1$，所以 $\frac{3}{4}<t_1<1$，

所以 $e_1^2+e_2^2=t_1+t_2=t_1+\frac{t_1}{4t_1-3}=\frac{4t_1^2-2t_1}{4t_1-3}$，

设 $f(x)=\frac{4x^2-2x}{4x-3}, \frac{3}{4}<x<1$，则 $f'(x)=\frac{16x^2-24x+6}{(4x-3)^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{3-\sqrt{3}}{4}, x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$，所以 $f'(x)<0$ 在 $x\in(\frac{3}{4},1)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $x\in(\frac{3}{4},1)$ 上单调递减，当 x 趋于 $\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 趋于 $+\infty$，当 x 趋于 1 时，$f(x)$ 趋于 2，

所以 $f(x)>2$，即：$e_1^2+e_2^2>2$.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得，$\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{AC}{AB}$，

因为 $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}$，

所以 $\frac{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD}{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD}=\frac{AC}{AB}$，

所以 $\sin\angle CAD=\sin\angle BAD$，

因为 $\angle CAD+\angle BAD<\pi$，所以 $\angle CAD=\angle BAD$，

即 AD 平分 $\angle BAC$．……5 分

(2) 因为 $\frac{1}{2}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{CD}{BD}$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $BD=\sqrt{2}$，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$，

$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$，

因为 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，所以 $AB^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2$，

因为 $AD=1$，所以 $AB^2+2AC^2=6$，

因为 $\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{1}{2}$，所以 $AB=2AC$，

所以 $AC=1$．……10 分

18.【解析】

(1) $\because f(x)=e^x-\ln x+1$，$\therefore f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，$\therefore k=f'(1)=e-1$.

$\because f(1)=e+1$，$\therefore$切点坐标为$(1,1+e)$,

$\therefore$函数$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-e-1=(e-1)(x-1)$,即$y=(e-1)x+2$,

$\therefore$切线与坐标轴交点坐标分别为$(0,2),(\frac{-2}{e-1},0)$,

$\therefore$所求三角形面积为$\frac{1}{2}\times 2\times|\frac{-2}{e-1}|=\frac{2}{e-1}$. ……5分

(2)［法一］：通性通法

$\because f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，$\therefore f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$，且$a>0$.

设$g(x)=f'(x)$,则$g'(x)=ae^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$,

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$a=1$时，$f'(1)=0$，$\therefore f(x)_{min}=f(1)=1$，$\therefore f(x)\ge 1$成立.

当$a>1$时，$\frac{1}{a}<1$，$\therefore e^{\frac{1}{a}-1}<1$，$\therefore f'(\frac{1}{a})f'(1)=a(e^{\frac{1}{a}-1}-1)(a-1)<0$,

$\therefore$存在唯一$x_0>0$，使得$f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$，且当$x\in(0,x_0)$时$f'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时$f'(x)>0$，

$\therefore ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，$\therefore \ln a+x_0-1=-\ln x_0$,

因此$f(x)_{min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a=\frac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a\ge 2\ln a-1+2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$,

$\therefore f(x)>1$，则$f(x)\ge 1$恒成立；

当$0<a<1$时，$f(1)=a+\ln a<a<1$，$\therefore f(1)<1$，$f(x)\ge 1$不是恒成立.

综上所述，实数a的取值范围是$[1,+\infty)$. ……12分

19.【解析】［方法一］：向量法

(1) 如图，以AC的中点O为原点，分别以射线OB，OC为x，y轴的正半轴，建立空间直角坐标系$O\text{-}xyz$.

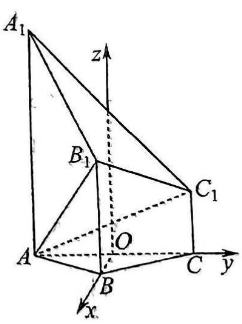
由题意知各点坐标如下：

$A(0,-\sqrt{3},0)$，$B(1,0,0)$，$A_1(0,-\sqrt{3},4)$，$B_1(1,0,2)$，$C_1(0,\sqrt{3},1)$

因此$\overrightarrow{AB_1}=(1,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,\sqrt{3},-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,2\sqrt{3},-3)$，

由$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$得$AB_1\perp A_1B_1$；由$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$得$AB_1\perp A_1C_1$，

所以$AB_1\perp$平面$A_1B_1C_1$. ……6分



(2) 设直线AC_1与平面ABB_1所成的角为θ.

由(I)可知$\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，

设平面ABB_1的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ 2z=0\end{cases}$，可取$\vec{n}=(-\sqrt{3},1,0)$，

所以$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

因此，直线AC_1与平面ABB_1所成的角的正弦值是$\frac{\sqrt{39}}{13}$. ……12分

20.【解析】

（1）根据已知得 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-(a+1)x$，则

当 $a=-3$ 时，$f(x)=-3\ln x+\frac{1}{2}x^2+2x$，$f'(x)=-\frac{3}{x}+x+2=\frac{(x-1)(x+3)}{x}$，$x>0$，

由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=-3$（舍）.

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=\frac{5}{2}$，无极大值. ……5 分

（2）因为 $f'(x)=\frac{(x-1)(x-a)}{x}(x>0)$，

若 $0<a<1$，当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(a,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,1)$ 上单调递减，

$f(x)$ 有极大值 $f(a)=a\ln a+\frac{1}{2}a^2-(a+1)a=a\left(\ln a-\frac{1}{2}a-1\right)<0$，

极小值 $f(1)=-a-\frac{1}{2}<0$，又 $f(2a+2)=a\ln(2a+2)>0$，

所以函数 $f(x)$ 有 1 个零点.

若 $a=1$，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 单调递增，

此时 $f(1)=-\frac{3}{2}<0$，$f(4)=\ln 4>0$，所以函数 $f(x)$ 有 1 个零点；

若 $a>1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,a)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(1)=-a-\frac{1}{2}<0$，显然极小值 $f(a)<0$，

又 $f(2a+2)=a\ln(2a+2)>0$，所以函数 $f(x)$ 有 1 个零点.

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 1. ……12 分

21.【解析】

（1）双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 一条渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，焦点 $F(-c,0)$，

则焦点到渐进线的距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，由 F 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ 可知：$b=\sqrt{3}$，

由渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$ 知：$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，故 $a=1$，

所以双曲线方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$； ……4 分

（2）设直线 l 的方程为 $x=my-2$，设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my-2\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得：$(3m^2-1)y^2-12my+9=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{12m}{3m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$，

所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\frac{4}{3m^2-1}$，$x_1x_2=m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4=\frac{-3m^2-4}{3m^2-1}$，

假设存在实数 t，使得 $\left|\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}\right|=\left|\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FN}\right|$，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，而 $A(1,0),F(-2,0)$，

故由 AP 方程：$y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，令 $x=t$ 得 $M(t,\frac{y_1}{x_1-1}(t-1))$，

第 5 页 共 7 页

同理 AQ 方程：$y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，令 $x=t$ 得 $N(t,\frac{y_2}{x_2-1}(t-1))$，

所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(t+2,\frac{y_1}{x_1-1}(t-1)\right)\left(t+2,\frac{y_2}{x_2-1}(t-1)\right)=0$，即 $(t+2)^2+\frac{y_1y_2}{(x_1-1)(x_2-1)}(t-1)^2=0$，

则 $(t+2)^2+\frac{\frac{9}{3m^2-1}}{\frac{-3m^2-4}{3m^2-1}-\frac{4}{3m^2-1}+1}(t-1)^2=0$，即 $(t+2)^2-(t-1)^2=0$，解得 $t=-\frac{1}{2}$，

故存在实数 $t=-\frac{1}{2}$，使得 $\left|\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}\right|=\left|\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FN}\right|$. ……12 分

22.【解析】

（1）由已知条件可知：$2c\cdot\sin A\cos B=a\cdot\sin A-b\cdot\sin B+\frac{1}{4}b\cdot\sin C$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 得 $2ac\cdot\cos B=a^2-b^2+\frac{1}{4}bc$

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 得 $a^2+c^2-b^2=a^2-b^2+\frac{1}{4}bc$

$\therefore b=4c$，

又 $\because c=1,\therefore b=4$ ……3 分

（2）设 $\angle BAC=\theta$

$\because \overrightarrow{AD}$ 为 BC 边上中线 $\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta=2\cos\theta+\frac{1}{2}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AD}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta}=\frac{\sqrt{17+8\cos\theta}}{2}$

$\cos\angle BAD=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{4\cos\theta+1}{\sqrt{17+8\cos\theta}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ①

$\therefore 28\cos^2\theta+8\cos\theta-11=0$

$\therefore (2\cos\theta-1)(14\cos\theta+11)=0\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{11}{14}$

由①，得 $4\cos\theta+1>0\therefore\cos\theta>-\frac{1}{4}$ $\therefore\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\theta=\sqrt{3}$ ……7 分

（3）设 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{AF}$（$\lambda$，$\mu\in[1,+\infty)$）

$\therefore\left|\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{\lambda}$，$\left|\overrightarrow{AF}\right|=\frac{4}{\mu}$

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow 2k\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\lambda}{2k}\overrightarrow{AE}+\frac{\mu}{2k}\overrightarrow{AF}$

根据三点共线公式，得 $\lambda+\mu=2k$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{k}\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\right)$$

$$=\frac{1}{2k}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{2k}\cdot\left(\frac{1}{\mu}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\frac{1}{\lambda}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right)\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\theta\right)$$ （$\cos\theta=\frac{1}{2}$，θ 为$\angle BAC$）

$$=\frac{1}{2k}\cdot\left(\frac{16}{\mu}-\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\mu}-\frac{2}{\lambda}\right)$$

$$=\frac{3}{\lambda\mu}\cdot\frac{6\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|\sin\theta}=6$$

$\therefore \lambda\mu=6$

$$\therefore \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\lambda-\frac{6}{\lambda}}{\lambda+\frac{6}{\lambda}}=3\cdot\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+6}=3\cdot\left(1-\frac{7}{\lambda^2+6}\right)$$

$$\mu=\frac{6}{\lambda}\geq 1\Rightarrow\lambda\leq 6\Rightarrow\lambda\in[1,6]\Rightarrow\lambda^2+6\in[7,42]$$

$$\Rightarrow\frac{1}{6}\leq\frac{7}{\lambda^2+6}\leq 1\Rightarrow\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EF}\in\left[0,\frac{5}{2}\right]$$ ……12分