秘密★启用前

2023年第二次高考考前适应性训练试卷

数学试题参考答案和评分参考

评分说明：

1.本解答只给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则。

2.对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4.只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

第I卷

一．选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	C	A	D	D	B	A

二．选择题：

题号	9	10	11	12
答案	AC	ACD	ABD	AB

第II卷

三．填空题：

13．2　　14．$8x+y-8=0$　　15．4　　16．9　$\{1,8,10,64\}$

三．解答题：

17．解：（1）因为$\sqrt{3}b=c+\sqrt{3}a$，$A=\frac{\pi}{6}$，

所以由正弦定理得$\sqrt{3}\sin B=\sin C+\sqrt{3}\sin A$，……………………………1 分

所以$\sqrt{3}\sin B=\sin(\frac{5\pi}{6}-B)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，……………………………………………………2 分

解得$\sin(B-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，………………………………………………………………4 分

因为$B\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，$B-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$，

所以$B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，………………………………………………………………5 分

所以$B=\frac{\pi}{2}$．……………………………………………………………………6 分

（2）因为$c=1$，$\sqrt{3}b=c+\sqrt{3}a$，所以$\sqrt{3}b-\sqrt{3}a=1$．

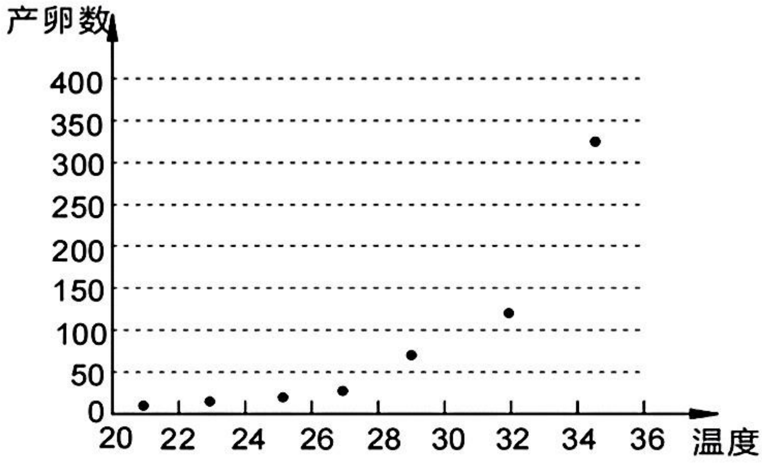
因为$\cos C=\frac{1}{5}$，由余弦定理得$\frac{a^2+b^2-1}{2ab}=\frac{1}{5}$．…………………………8 分

所以$a^2+b^2=\frac{7}{6}$，$2ab=\frac{5}{6}$，……………………………………………………10 分

所以$(a+b)^2=2$，即$a+b=\sqrt{2}$，…………………………………………………11 分

因此$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=\sqrt{2}+1$．………………………………………12 分

18．解：（1）散点图如图所示，



…………………………………2 分

根据散点图可以判断，$y=a\cdot e^{bx}$ 适宜作为产卵数 y 关于温度 x 的回归方程类型. ……………………………………………………4 分

(2)令 $w=\ln y$，先建立 w 关于 x 的线性回归方程，由数据得

$$\sum_{i=1}^{7}x_iw_i-7\overline{x}\overline{w}=40.180，\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{7}x_i^{\ 2}-7\overline{x}^2=147.700，$$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iw_i-7\overline{x}\overline{w}}{\sum_{i=1}^{7}x_i^{\ 2}-7\overline{x}^2}=\frac{40.180}{147.700}\approx 0.272，$$ ……………………………………7 分

$\ln\hat{a}=\overline{w}-b\overline{x}\approx -3.849$. ……………………………………………………9 分

所以 w 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{w}=-3.849+0.272x$ ……………………10 分

因此，y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=e^{-3.849+0.272x}=e^{-3.849}e^{0.272x}$. ……………12 分

19．解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q，…………………………1 分

由已知可得$\begin{cases} a_1=b_1=3, \\ a_1+3d=b_1q, \\ a_1(a_1+4d)=b_1+b_1q+b_1q^2, \end{cases}$ 且 $q\neq 1$， ....2 分

解得$\begin{cases} d=1, \\ q=2, \end{cases}$ ....4 分

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+2$， ....5 分

$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times 2^{n-1}$. ....6 分

（2）由（1）知$c_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$， ....7 分

所以$M_n=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$. ....8 分

因为$M_n<m$恒成立，所以$\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)<m$，

而$\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)<\dfrac{2}{3}$， ....9 分

所以$m\geq\dfrac{2}{3}$， ....11 分

所以m的最小值为$\dfrac{2}{3}$. ....12 分

20.（1）证明：连接PE，BD，EC，EC交BD于点G.

因为 E 为 AB 的中点，$PA=PB$，所以 $PE\perp AB$. ……………………………1 分

因为平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\bigcap$ 平面 $ABCD=AB$，
$PE\subset$ 平面 PAB
所以 $PE\perp$ 平面 $ABCD$，……………………………………………………………2 分
因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PE\perp BD$. ………………………………………3 分
因为 $\triangle ABD\cong\triangle BCE$，
所以 $\angle CEB=\angle ADB$，所以 $\angle CEB+\angle ABD=90^\circ$，
所以 $BD\perp EC$，………………………………………………………………………4 分

因为 $PE\bigcap EC=E$，PE，$EC\subset$ 平面 PEC，

所以 $BD\perp$ 平面 PEC. ………………………………………………………………5 分
因为 $EF\subset$ 平面 PEC，
所以 $BD\perp EF$. …………………………………………………………………………6 分

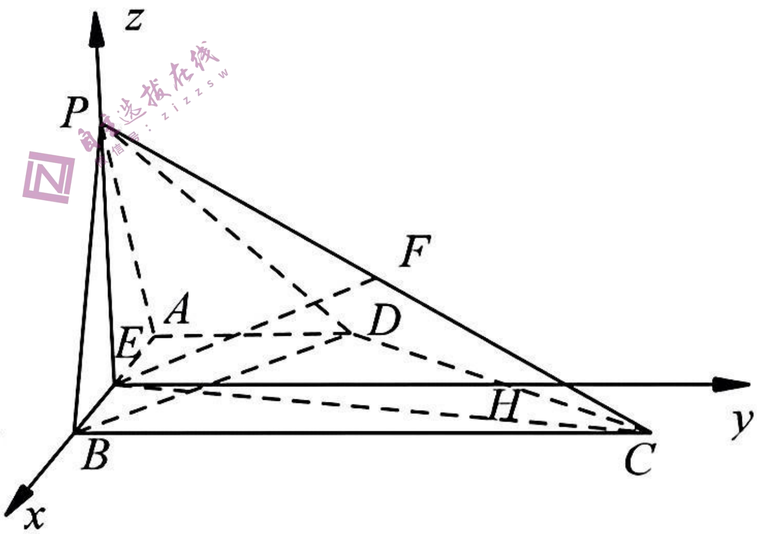
（2）取 DC 的中点 H，分别以 EB，EH，EP 所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系.

设 $AB=2$，则 $BC=2$，

$AD=1$，$PA=PB=\sqrt{2}$，

则 $P(0,0,1)$，$C(1,2,0)$，

$D(-1,1,0)$，$E(0,0,0)$，……7 分



设 $F(x,y,z)$，$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}$（$0<\lambda<1$），

所以 $(x,y,z-1)=\lambda(1,2,-1)$，

所以 $x=\lambda$，$y=2\lambda$，$z=1-\lambda$，即 $F(\lambda,2\lambda,1-\lambda)$ ……………………………8 分

$\overrightarrow{DC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{EF}=(\lambda,2\lambda,1-\lambda)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a+b=0,\\ a+2b-c=0,\end{cases}$ 取 $\vec{m}=(1,-2,-3)$，……………………………9 分

$|\cos<\vec{m},\overrightarrow{EF}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{|\lambda-4\lambda-3+3\lambda|}{\sqrt{14}\sqrt{\lambda^2+4\lambda^2+(1-\lambda)^2}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$，

……………………………………………………………………10 分

整理得 $6\lambda^2-2\lambda=0$，…………………………………………………11 分

因为 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，即 $\overrightarrow{PF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PC}$

所以，当 $PF=\dfrac{1}{3}PC$ 时，EF 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

……………………………………………………………………12 分

21．解：（1）设△PF_1F_2 内切圆半径为 r，

由题意 $S_{\Delta PF_2I}=\dfrac{1}{2}|PF_2|\cdot r$，$S_{\Delta F_1F_2I}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot r$，$S_{\Delta PF_1I}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot r$.

所以 $S_{\Delta PF_2I}$：$S_{\Delta F_1F_2I}$：$S_{\Delta PF_1I}=|PF_2|:|F_1F_2|:|PF_1|=2:3:4$，……………1 分

因为△PF_1F_2 的周长为 18，

所以 $|PF_2|=4$，$|PF_1|=8$，$|F_1F_2|=6$，……………………………………2 分

所以 $2a=|PF_1|-|PF_2|=4$，$2c=6$，

所以 $a^2=4$，$b^2=5$， ....3 分

所以双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$. ....4 分

（2）由题知，直线 l 斜率存在且不为 0，可设其方程为 $x=ty+3\left(t\neq 0\right)$，

$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(0,\dfrac{-3}{t})$

联立 $\begin{cases} x=ty+3, \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1, \end{cases}$ 整理得 $(5t^2-4)y^2+30ty+25=0$， ....5 分

因为直线 l 与双曲线右支交于两点，则有 $\begin{cases} y_1y_2<0, \\ \Delta=\left(30t\right)^2-100\left(5t^2-4\right)>0, \\ 5t^2-4\neq 0, \end{cases}$

解得 $t^2<\dfrac{4}{5}$， ....6 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-30t}{5t^2-4}$，$y_1y_2=\dfrac{25}{5t^2-4}$， ....7 分

因为 $\overrightarrow{QM}=m\overrightarrow{MF_2}\left(m>0\right)$，所以 $(x_1,y_1+\dfrac{3}{t})=m(3-x_1,-y_1)$，

所以 $y_1+\dfrac{3}{t}=m(-y_1)$，即 $y_1=\dfrac{-3}{t(m+1)}$，

同理 $y_2=\dfrac{-3}{t(n+1)}$，..8 分

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-3}{t(m+1)}+\dfrac{-3}{t(n+1)}=\dfrac{-3}{t}\cdot\dfrac{(m+1)+(n+1)}{(m+1)(n+1)}=\dfrac{-30t}{5t^2-4}$，①

$y_1y_2=\dfrac{9}{t^2(m+1)(n+1)}=\dfrac{25}{5t^2-4}$，②

两式相除得 $(m+1)+(n+1)=\dfrac{18}{5}$，……………………………………………………9 分

因为 $\dfrac{|MF_2|}{|NF_2|}=-\dfrac{y_1}{y_2}=-\dfrac{n+1}{m+1}=-\left(\dfrac{\dfrac{18}{5}-(m+1)}{m+1}\right)=1-\dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{1}{m+1}$，……10 分

当 l 与渐近线 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ 平行时，$\dfrac{1}{t}=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$y_1=\mp\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$，

此时 $m=\dfrac{13}{5}$，

因为 l 与双曲线右支交于两点，所以 $m>\dfrac{13}{5}$，……………………………………11 分

所以 $0<\dfrac{1}{m+1}<\dfrac{5}{18}$，所以 $0<\dfrac{|MF_2|}{|NF_2|}<1$，

即 $\dfrac{|MF_2|}{|NF_2|}$ 的取值范围为 $(0,1)$ ……………………………………………………12 分

22．解：（1）由题知 $g(x)=f'(n)(x-n)+f(n)$，

记 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax-g(x)$，

所以$h'(x)=\frac{1}{x}+x-\frac{1}{n}-n=\frac{x^2-\left(\frac{1}{n}+n\right)x+1}{x}=\frac{\left(x-\frac{1}{n}\right)(x-n)}{x}$，

……………………………………………………………………1 分

当$n=1$时，$h'(x)\geq 0$，所以$h(x)$单调递增，此时$x=n=1$是$h(x)$的唯一零点．……………………………………………………2 分

当$n>1$时，依单调性知$h\left(\frac{1}{n}\right)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)\to -\infty$，所以存在$n_1\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$，使得$h(n_1)=0$，此时$h(x)$有两个零点$x=n_1$和$x=n$，不满足题意，舍去；

当$n<1$时，依单调性知$h\left(\frac{1}{n}\right)<0$，$\lim\limits_{x\to +\infty}h(x)\to +\infty$，所以存在$n_2\in\left(\frac{1}{n},+\infty\right)$，使得$h(n_2)=0$，此时$h(x)$有两个零点$x=n_2$和$x=n$，不满足题意，舍去；

综上可得$n=1$．……………………………………………………4 分

（2）因为$f'(x)=\frac{1}{x}+x-a=\frac{x^2-ax+1}{x}$，

当$0<a\leq 2$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，$f(x)$单调递增，无极值；……5 分

当$a>2$时，令$f'(x)=0$，有$x^2-ax+1=0$，

其$\Delta>0$，又$f'(1)=2-a<0$，

所以存在x_1，x_2，使得$f(x_1)=f(x_2)=0$，且$0<x_1<1<x_2$，$x_1+x_2=a$，

$x_1x_2=1$，　　……7分

所以$f(x_1)-f(x_2)-ma^2+1$

$=\ln x_1+\frac{x_1^2}{2}-ax_1-\ln x_2-\frac{x_2^2}{2}+ax_2-ma^2+1$

$=2\ln x_1-\frac{x_1^2}{2}+\frac{1}{2x_1^2}-m\left(x_1^2+\frac{1}{x_1^2}+2\right)+1$，　……8分

设$t=x_1^2\in(0,1)$，$\varphi(t)=\ln t-\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}-m\left(t+\frac{1}{t}+2\right)+1$，则有$\varphi(t)>0$恒成立.

由$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}-m\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1-t^2}{2t^2}\left(1-\frac{2}{t+1}+2m\right)$，……9分

因为当$0<t<1$，$y=1-\frac{2}{t+1}$的值域为$(-1,0)$，所以有

当$2m>1$时，$\varphi'(t)\geq 0$，于是$\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增，

结合$\varphi(1)=-4m+1<0$，知此时$\varphi(t)<0$恒成立，不满足题意，舍去.　……10分

共 6 页

当 $0<2m<1$ 时，$\exists t_0\in(0,1)$，使得 $\varphi'(t_0)=0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,t_0)$ 上单调递减，在 $(t_0,1)$ 上单调递增，所以

$$\varphi(t)_{\min}=\varphi(t_0)=\ln t_0-\frac{t_0}{2}+\frac{1}{2t_0}+\frac{t_0-1}{2(t_0+1)}\cdot\frac{(t_0+1)^2}{t_0}+1=\ln t_0+1>0,$$

所以 $\frac{1}{\mathrm{e}}<t_0<1$，于是 $m=\frac{1}{1+t_0}-\frac{1}{2}$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}-\frac{1}{2}\right)$.

综上，m 的取值范围为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}-1}{2\mathrm{e}+2}\right)$. ……………………………………12 分