

2022 - 2023 下学年高三年级 TOP 二十名校二月调研考
高三理科数学参考答案

1. 【答案】 B

【解析】 $A = \{x | 1 < x < 4\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$. 故选 B.

2. 【答案】 C

【解析】 由题意 $\frac{\bar{z}}{z-1} = \frac{1-i}{i} = \frac{(1-i)i}{i^2} = \frac{1+i}{-1} = -1-i$, 则 $\left| \frac{\bar{z}}{z-1} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
故选 C.

3. 【答案】 C

【解析】 由 $|a-b| = \sqrt{3}$, 得 $(a-b)^2 = 3$, 即 $a^2 - 2a \cdot b + b^2 = 3$, 则有 $|a|^2 - 2|a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle + |b|^2 = 3$, 又 $|a| = 2|b| = 2$, 可得 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{1}{2}$, 所以 $\langle a, b \rangle = 60^\circ$. 故选 C.

4. 【答案】 D

【解析】 根据散点图, 用光滑曲线把图中各点依次连接起来(图略), 由图并结合选项可排除 A, B, C. 故选 D.

5. 【答案】 A

【解析】 扇形 ACB 的面积 $S_{\text{扇形}ACB} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \times \sqrt{6} = \pi$, $S_{\text{扇形}ACB} - S_{\triangle ABC} = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 则底面积 $S = S_{\text{扇形}ACB} + 2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 3\pi - 3\sqrt{3}$, 所以曲面棱柱的体积 $V = 3\pi - 3\sqrt{3}$. 故选 A.

6. 【答案】 C

【解析】 因为 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 且 $P(0 \leq X \leq 5) = 0.12$, 根据正态分布的对称性, 则有 $P(-5 \leq X \leq 0) = 0.12$, 所以 $P(X \leq -5) = \frac{1}{2} - P(-5 \leq X \leq 0) = 0.38$, 故 100 个新生儿中, 实际出生日期比预产期提前超过 5 天的新生儿数为 $100 \times 0.38 = 38$. 故选 C.

7. 【答案】 A

【解析】 由 $A(3, 2\sqrt{3})$ 在 $y^2 = 2px$ 上, 得 $12 = 2p \times 3$, $p = 2$, $F(1, 0)$, 则直线 AF 的斜率 $k = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} = \sqrt{3}$, 倾斜角为 60° . 过点 A 作 l 的垂线, 垂足为 H, 由抛物线的定义可知 $|AF| = |AH|$, 则 $\triangle AFH$ 为等边三角形, 设 l 与 x 轴交于点 G, 则 $|AH| = 2|FG|$, 由相似可知 $\frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|FG|}{|AH|} = \frac{1}{2}$, 所以 $|AF| = |BF|$. 故选 A.

8. 【答案】 D

【解析】 将 6 名志愿者分配到 3 个社区参加服务工作, 每名志愿者只分配到 1 个小区, 每个小区至少分配 1 名志愿者, 共三种情况. 第 1 种情况: 3 个社区的志愿者人数分别为 4, 1, 1, 不同的分配方案共有 $\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 15A_3^3$ 种; 第 2 种情况: 3 个社区的志愿者人数分别为 3, 2, 1,

【高三理科数学参考答案 (第 1 页 共 8 页)】

不同的分配方案共有 $C_6^3 C_3^2 C_1^1 A_3^3 = 60 A_3^3$ 种;第3种情况:3个社区的志愿者人数分别为2,2,2,不同的分配方案共有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = 15 A_3^3$ 种.则分配到3个小区的志愿者人数互不相同的概率

$$P = \frac{60}{15 + 60 + 15} = \frac{2}{3}. \text{ 故选 D.}$$

9.【答案】 D

【解析】 因为 $\sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A$, 则有 $\sin A(\sin A - \sin C) = \sin^2 B - \sin^2 C$, 由正弦定理, 得 $a(a-c) = b^2 - c^2$, 整理得 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} = 1$, 由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, $B = 60^\circ$. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 则 AB 边上的高 $h = a \cdot \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, 由正弦定理得 $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{\sin(120^\circ - C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C} + \frac{1}{2}$. 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 可知 $30^\circ < C < 90^\circ$, 则 $\tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $a = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C} + \frac{1}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 从而 $\frac{\sqrt{3}}{4} < h < \sqrt{3}$, 因此 AB 边上的高的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \sqrt{3}\right)$. 故选 D.

10.【答案】 A

【解析】 $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{a}{b} = \ln \frac{a}{2b} = \ln a - \ln 2b$, 则有 $\ln a - \ln 2b = \frac{1}{2a} - \frac{1}{b}$, 即 $\ln a - \frac{1}{2a} = \ln 2b - \frac{1}{b}$. 因为 $\ln 2a - \frac{1}{2a} > \ln a - \frac{1}{2a}$, $\ln 2b - \frac{1}{b} > \ln b - \frac{1}{b}$, 所以 $\ln 2a - \frac{1}{2a} > \ln b - \frac{1}{b}$. 设 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 则 $2a > b$, 即 $2a - b > 0$. 故选 A.

11.【答案】 B

【解析】 设直线 l 与曲线 $C_1: y = e^{x+a}$ 和 $C_2: y = x^2$ 都相切, 且与 C_1 相切于点 (x_0, e^{x_0+a}) , 因为 $(e^{x+a})' = e^{x+a}$, 所以直线 l 的斜率为 e^{x_0+a} , 故直线 l 的方程为 $y - e^{x_0+a} = e^{x_0+a}(x - x_0)$, 与 $y = x^2$ 联立整理得 $x^2 - e^{x_0+a}x - (1 - x_0)e^{x_0+a} = 0$, 则有 $\Delta = (-e^{x_0+a})^2 + 4(1 - x_0)e^{x_0+a} = 0$, 即 $\Delta = e^{x_0+a} + 4x_0 + 4 = 0$. 依题意可知关于 x_0 的方程 $e^{x_0+a} + 4x_0 + 4 = 0$ 有唯一解, 即函数 $g(x) = e^{x+a} + 4x + 4$ 有唯一零点, $g'(x) = e^{x+a} - 4$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x_1 = \ln 4 - a$, 则 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, x_1)$ 单调递减, 在区间 $(x_1, +\infty)$ 单调递增, 则有 $g(x_1) = 0$, 即 $e^{\ln 4 - a} - 4(\ln 4 - a) + 4 = 0$, 解得 $a = 2 \ln 2 - 2$. 故选 B.

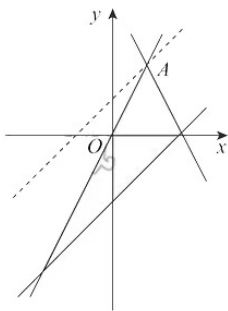
12.【答案】 B

【解析】 因为 $a_{n+1} > a_n$, $a_1 \geq 0$, $a_1 - a_1 = 0 \in \{a_n\}$, 所以 $a_1 = 0$. 因为 $0 = a_1 < a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < \dots < a_n - a_2 < a_n$, 且 $a_3 - a_2, a_4 - a_2, \dots, a_n - a_2 \in \{a_n\}$, 所以 $a_3 - a_2 = a_2, a_4 - a_2 = a_3, \dots, a_n - a_2 = a_{n-1}$. 故 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前6项可设为 $0, d, 2d, 3d, 4d, 5d$, 则有 $a_4 = a_2 + a_3$. 故选 B.

13.【答案】 -1

【解析】 作出可行域如图中阴影部分所示, 当直线 $y = x - z$ 经过点 $A(1, 2)$ 时, 纵截距 $-z$ 最大, 则 z 取最小值, 此时 $z_{\min} = x - y = 1 - 2 = -1$.

【高三理科数学参考答案 (第2页 共8页)】

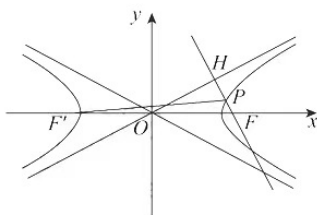


14. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】 由题图知 $f\left(\frac{4\pi}{9}\right) = 0$, 则 $\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\omega = \frac{9k-3}{4} (k \in \mathbf{Z})$. 设 $g(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 T , 易知 $T < 2\pi < 2T$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} < 2\pi < \frac{4\pi}{\omega}$, 则有 $1 < |\omega| < 2$, 当且仅当 $k=1$ 时, 符合题意, 此时 $\omega = \frac{3}{2}$.

15. 【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】 由 $\vec{HP} = 2\vec{PF}$, 可知点 P 在线段 FH 上, 且 $|HP| = 2|PF|$, 如图所示, 根据双曲线的对称性, 不妨设点 H 在第一象限, 设 O 为坐标原点, 则直线 OH 的方程为 $bx - ay = 0$. 由 $FH \perp OH$, 则点 $F(c, 0)$ 到直线 $bx - ay = 0$ 的距离为 $|HF| = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b$, 又 $|HP| = 2|PF|$, 则 $|PF| = \frac{1}{3}b$. 由 $|FO| = c$, 可知 $\cos \angle HFO = \frac{b}{c}$. 设双曲线 C 的左焦点为 F' , 连接 PF' , 由双曲线的定义可知 $|PF'| = |PF| + 2a = \frac{b}{3} + 2a$, 在 $\triangle PFF'$ 中, 由余弦定理可得 $\cos \angle PFF' = \frac{\frac{b^2}{9} + 4c^2 - \left(2a + \frac{b}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b}{3}} = \frac{b}{c}$, 整理得 $3c^2 - 3a^2 - ab = b^2$, 即 $3b^2 - ab = b^2$, $a = 2b$, 则 $a^2 = 4(c^2 - a^2)$, $5a^2 = 4c^2$, 所以 C 的离心率 $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



16. 【答案】 $\frac{9\pi}{2}$

【解析】 在三棱锥 $P-CDE$ 的侧面 PCD 中, 如果 $\angle CPD = 90^\circ$, 则三条侧棱 PC, PE, PD 两两

【高三理科数学参考答案 (第3页 共8页)】

垂直,底面 CDE 不可能为直角三角形,故 $\angle CPD \neq 90^\circ$. 又 $PC > PD$, 则 $\angle PDC = 90^\circ$. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 因为 $\angle A = \angle B$, 所以在三棱锥 $P-CDE$ 中, $PE \perp PC, PE \perp PD$, 则 $PE \perp$ 平面 PCD , 又 $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $PE \perp CD$, 又因为 $CD \perp PD$, 所以 $CD \perp$ 平面 PDE , 又 $DE \subset$ 平面 PDE , 所以 $CD \perp DE$, 即 $\angle CDE = 90^\circ$. 所以三棱锥 $P-CDE$ 外接球的球心为 CE 的中点 O , 半径为 OC . 在 $\triangle PCD$ 中, $\angle PDC = 90^\circ, PD = 1, PC = 2$, 则 $CD = \sqrt{3}$. 在直角梯形 $ABCD$ 中, 作 $DH \perp BC$ 于 $H, DH^2 + CH^2 = AB^2 + (BC - AD)^2 = AB^2 + 1 = 3$, 则 $AB = \sqrt{2}$, 且有 $CE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以外接球 O 的半径为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 球 O 的表面积为 $\frac{9\pi}{2}$.

17. 【答案】 见解析

【解析】 (1) 由 $na_n - (n-1)a_{n+1} = 1$, ①

当 $n \geq 2$ 时, $(n-1)a_{n-1} - (n-2)a_n = 1$. ②

① - ②, 得 $(2n-2)a_n - (n-1)(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0$,

又 $n \neq 1$, 则 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ (3 分)

即 $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$,

故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. (5 分)

(2) 由 $na_n - (n-1)a_{n+1} = 1$, 令 $n=1$ 得 $a_1 = 1$,

由 $a_4 - a_2 = 4$, 可知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$,

所以 $a_n = 2n-1$ (6 分)

设 $b_n = a_n - 8 = 2n-9$, 则数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 其前 4 项为负, 从 5 项开始为正.

设 b_n 的前 n 项和为 P_n ,

若 $n \leq 4, T_n = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|$

$= -(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= -P_n = 8n - n^2$ (9 分)

若 $n \geq 5, T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

$= -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_n)$

$= -P_4 + (P_n - P_4) = P_n - 2P_4 = n^2 - 8n + 32$.

综上, 当 $n \leq 4$ 时, $T_n = 8n - n^2$; 当 $n \geq 5$ 时, $T_n = n^2 - 8n + 32$ (12)

18. 【答案】 见解析

【解析】 (1) 由列联表可得, $K^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} = \frac{100}{21} \approx 4.76 > 3.841$,

所以有 95% 的把握认为手机屏幕的抗跌性与手机款式有关. (4 分)

(2) X 可能的取值分别为 0, 1, 2, 则

$P(X=0) = (1-0.05) \times (1-0.08) = 0.874$,

$P(X=1) = 0.05 \times (1-0.08) + (1-0.05) \times 0.08 = 0.122$,

$P(X=2) = 0.05 \times 0.08 = 0.004$ (8 分)

所以 X 的分布列为:

【高三理科数学参考答案 (第 4 页 共 8 页)】

X	0	1	2
P	0.874	0.122	0.004

$$E(X) = 1 \times 0.122 + 2 \times 0.004 = 0.13,$$

所以免费更换屏幕的次数 X 的期望为 0.13. (12 分)

19. 【答案】 见解析

【解析】 (1) 连接 O_1C, O_2C, O_1D, O_2D ,

因为 C, O_1, D, O_2 四点共面, 且圆柱 O_1O_2 的上下底面平行,

所以 $O_1C \parallel O_2D$ (2 分)

因为 $AC = BC$, 所以 $AB \perp O_2C$,

又 $AB \perp O_1O_2$, 且 $O_1O_2 \cap O_2C = O_2$,

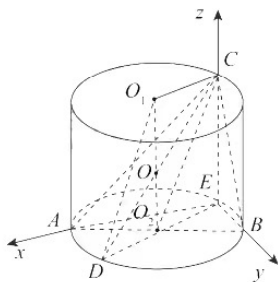
所以 $AB \perp$ 平面 O_1O_2C ,

又 $CD \subset$ 平面 O_1O_2C , 所以 $AB \perp CD$ (4 分)

(2) 延长 DO_2 交 $\odot O_2$ 于点 E , 连接 CE ,

因为 E 在 $\odot O_2$ 上, AB 为 $\odot O_2$ 的直径, 所以 $AE \perp BE$.

如图所示, 以 E 为坐标原点, $\vec{EA}, \vec{EB}, \vec{EC}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $E-xyz$.



设 $\angle BAE = \theta (0 < \theta < 90^\circ)$, 则 $BE = 2\sin \theta, AE = 2\cos \theta$,

则有 $A(2\cos \theta, 0, 0), B(0, 2\sin \theta, 0), C(0, 0, 1), D(2\cos \theta, 2\sin \theta, 0)$,

$\vec{AC} = (-2\cos \theta, 0, 1), \vec{BC} = (0, -2\sin \theta, 1), \vec{CD} = (2\cos \theta, 2\sin \theta, -1)$ (6 分)

设平面 ABC 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{AC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{BC} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -2\cos \theta \cdot x + z = 0, \\ -2\sin \theta \cdot y + z = 0, \end{cases}$$

可取 $\mathbf{n} = (\tan \theta, 1, 2\sin \theta)$.

$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}, \vec{CD} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{CD}}{|\mathbf{n}| \cdot |\vec{CD}|} = \frac{2\sin \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1 + 4\sin^2 \theta} \cdot \sqrt{4\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 2\theta} + 1} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{105}}{35}. \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \sin^2 2\theta = \frac{3}{4}, \text{ 又 } 0 < \theta < 90^\circ,$$

【高三理科数学参考答案 (第 5 页 共 8 页)】

则有 $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 $\theta = 30^\circ$ 或 60° (10 分)

故三棱锥 $D-ABC$ 的体积 $V_{D-ABC} = V_{C-ABD} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABD} \times CE = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (12 分)

20. 【答案】 见解析

【解析】 (1) 由 $A(-\sqrt{2}, 0), B(\sqrt{2}, 0), C(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 三点的坐标, 易知椭圆 E 的焦点在 x 轴上,

设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (2 分)

又椭圆 E 过 $C(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $\frac{1}{2} + \frac{1}{b^2} = 1$, 得 $b^2 = 1$,

故 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (4 分)

(2) 设 $D(\sqrt{2}, m)$, 且有 $A(-\sqrt{2}, 0)$, 不妨设 $m > 0$,

所以直线 $AD: y = \frac{m}{2\sqrt{2}}(x + \sqrt{2})$, 即 $y = \frac{\sqrt{2}m}{4}(x + \sqrt{2})$ (5 分)

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ y = \frac{\sqrt{2}m}{4}(x + \sqrt{2}), \end{cases}$ 消去 y 得 $(m^2 + 4)x^2 + 2\sqrt{2}m^2x + 2m^2 - 8 = 0$,

设 $P(x', y')$, 则 $-\sqrt{2}x' = \frac{2m^2 - 8}{m^2 + 4}$,

所以 $x' = -\frac{\sqrt{2}m^2 - 4\sqrt{2}}{m^2 + 4}$, 所以 $y' = \frac{4m}{m^2 + 4}$ (7 分)

连接 OD , 取 OD 的中点 Q , 则 $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{m}{2})$, 连接 PQ ,

因为 $|PO| = |PD|$, 所以 $PQ \perp OD$.

又 $k_{OD} = \frac{m}{\sqrt{2}}, k_{PQ} = \frac{y' - \frac{m}{2}}{x' - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4m - m^3}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}m^2}$,

则有 $\frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4m - m^3}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}m^2} = -1$, 解得 $m = \sqrt{2}$ (10 分)

由 $y' = \frac{4m}{m^2 + 4}$, 得 $y' = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 + 4} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\frac{|AP|}{|PD|} = \frac{y_P}{y_D - y_P} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2$ (12 分)

【高三理科数学参考答案 (第 6 页 共 8 页)】

21. 【答案】 见解析

【解析】 (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x^2 - 2x - (x-2)e^x$.

$$f'(x) = 2x - 2 - e^x - (x-2)e^x = (2 - e^x)(x-1),$$

令 $f'(x) = (2 - e^x)(x-1) = 0$, 解得 $x = \ln 2$ 或 $x = 1$ (2 分)

当 $x \in (-\infty, \ln 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\ln 2, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, \ln 2)$, $(1, +\infty)$, 单调递增区间为 $(\ln 2, 1)$ (4 分)

$$(2) f'(x) = (2a - e^x)(x-1),$$

①若 $a \leq 0$, 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$f(x)$ 无极小值. (5 分)

②若 $a > 0$, 令 $f'(x) = (2a - e^x)(x-1) = 0$, 解得 $x = \ln(2a)$ 或 $x = 1$.

(i) 若 $\ln(2a) > 1$, 即 $a > \frac{e}{2}$,

x	$(-\infty, 1)$	$(1, \ln(2a))$	$(\ln(2a), +\infty)$
$f'(x)$	小于 0	大于 0	小于 0
$f(x)$	单调递减	单调递增	单调递减

所以 $f(x)$ 在 $x_0 = 1$ 处取极小值,

此时有 $f(x)$ 的极小值 $f(1) = e - a \in (-\infty, \frac{e}{2})$ (6 分)

(ii) 若 $\ln(2a) = 1$, 即 $a = \frac{e}{2}$,

$f'(x) \leq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 单调递减, 无极值. (7 分)

(iii) 若 $\ln(2a) < 1$, 即 $0 < a < \frac{e}{2}$,

x	$(-\infty, \ln(2a))$	$(\ln(2a), 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	小于 0	大于 0	小于 0
$f(x)$	单调递减	单调递增	单调递减

$f(x)$ 的极小值 $f(\ln(2a)) = a(\ln(2a))^2 - 2a\ln(2a) - 2a(\ln(2a) - 2)$ (8 分)

令 $t = 2a \in (0, e)$, 设 $h(t) = \frac{1}{2}t \ln^2 t - 2t \ln t + 2t$,

$$\text{则 } h'(t) = \ln t \left(\frac{1}{2} \ln t - 1 \right),$$

$$\text{令 } h'(t) = \ln t \left(\frac{1}{2} \ln t - 1 \right) = 0, \text{ 则 } t = 1 \text{ 或 } t = e^2 \text{ (舍去).}$$

当 $0 < t < 1$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增; 当 $1 < t < e$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减.

【高三理科数学参考答案 (第 7 页 共 8 页)】

所以 $h(t) \leq h(1) = 2$,

综上所述, $f(x)$ 的极小值的最大值为 2. (12 分)

22. 【答案】 见解析

【解析】 (1) 由 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x=2t, \\ y=2t^2 \end{cases}$ 可得, $y=2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}x^2$,

故 C_1 的普通方程为 $y=\frac{1}{2}x^2$ (2 分)

由 C_2 的参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=2+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ 可知, C_2 是以 $(0, 2)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆,

故 C_2 的普通方程为 $x^2+(y-2)^2=2$ (4 分)

(2) 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, 由 l 的极坐标方程 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$,

得 $\rho\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$, 即 $\rho\cos\theta=1$,

化为直角坐标方程为 $x=1$,

此时直线 l 与 C_1, C_2 共有三个交点. (6 分)

当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, $\rho(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta) = \sin\alpha - \cos\alpha$,

则有 $\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot y = \sin\alpha - \cos\alpha$, 整理得 $y-1=\tan\alpha(x-1)$ (8 分)

即直线 l 经过点 $(1, 1)$, 倾斜角为 $\alpha\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$,

若直线 l 与 C_1, C_2 共有三个交点, 则直线 l 与圆 C_2 相切,

此时 $\alpha=\frac{\pi}{4}$,

综上, 若直线 l 与 C_1, C_2 共有三个交点, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{4}$ (10 分)

23. 【答案】 见解析

【解析】 (1) $1=a^3+b^3+c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3}=3abc$,

所以 $abc \leq \frac{1}{3}$,

当且仅当 $a=b=c=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ 时等号成立. (4 分)

(2) 因为 $a>0, b>0, c>0$,

$1=a^3+b^3+c^3=\left(\frac{a^3}{2}+b^3\right)+\left(\frac{a^3}{2}+c^3\right) \geq 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{2}}+2\sqrt{\frac{a^3c^3}{2}}$,

当且仅当 $a^3=2b^3=2c^3$ 时等号成立. (8 分)

则 $\sqrt{2}\sqrt{a^3b^3}+\sqrt{2}\sqrt{a^3c^3} \leq 1$,

所以 $(ab)^{\frac{3}{2}}+(ac)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (10 分)

【高三理科数学参考答案 (第 8 页 共 8 页)】

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线