

2021 届高三 二轮复习联考(一) 新高考卷 数 学 试 卷

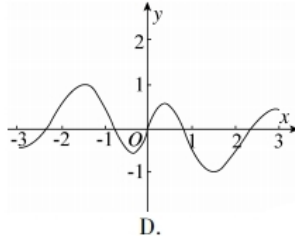
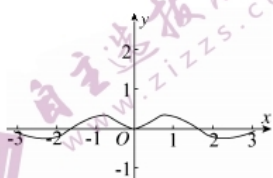
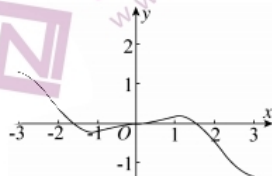
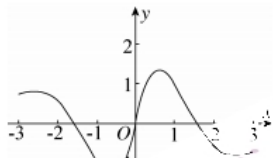
注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+2} \geq 0\right\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, -2) \cup [1, 2)$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 已知复数 z 满足 $z = \frac{2+i}{3+i}$, 则 $|z| =$
 A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\sqrt{3}$
3. 已知单位向量 a, b 满足 $|b - 2a| = \sqrt{3}$, 则 $a \cdot b =$
 A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2
4. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) =$
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
5. 函数 $f(x) = \frac{x^3 \cos x}{e^{|x|}}$ 在 $[-3, 3]$ 上的大致图象为



二轮复习联考(一) 新高考卷 数学试卷 第 1 页(共 4 页)

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率为 e , 若 $e \in (\sqrt{5}, \sqrt{10})$, 则 C 的焦点到一条渐近线的距离的取值范围为
- A. $(1, 3\sqrt{2})$ B. $(\sqrt{2}, +\infty)$ C. $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
7. 数学对于一个国家的发展至关重要, 发达国家常常把保持数学领先地位作为他们的战略需求. 现某大学为提高数学系学生的数学素养, 特开设了“古今数学思想”, “世界数学通史”, “几何原本”, “什么是数学”四门选修课程, 要求数学系每位同学每学年至多选 3 门, 大一到大三学年必须将四门选修课程选完, 则每位同学的不同选修方式有
- A. 60 种 B. 78 种 C. 84 种 D. 144 种
8. 已知函数 $f(x) = x + \frac{2}{1+e^x}$, 若正实数 m, n 满足 $f(m-9) + f(2n) = 2$, 则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为
- A. 8 B. 4 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{8}{9}$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 下列四个条件中, 能成为 $x > y$ 的充分不必要条件的是
- A. $xc^2 > yc^2$ B. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ C. $|x| > |y|$ D. $\ln x > \ln y$

10. 空气质量指数 AQI 是反映空气质量状况的指数, 其对应关系如下表:

AQI 指数值	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 300	> 300
空气质量	优	良	轻度污染	中度污染	重度污染	严重污染

为监测某化工厂排放废气对周边空气质量指数的影响, 某科学兴趣小组在校内测得 10 月 1 日—20 日 AQI 指数的数据并绘成折线图如下:

下列叙述不正确的是

- A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略大于 150
- B. 这 20 天中的空气质量为优的天数占 $\frac{1}{4}$
- C. 10 月 4 日到 10 月 11 日, 空气质量越来越好
- D. 总体来说, 10 月中旬的空气质量比上旬的空气质量好
11. 设函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\sin^2 x$, 则下列关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是
- A. 最小正周期为 2π
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称
- C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ 上单调递减
- D. 当 $x \in [0, a)$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$, 则实数 a 的取值范围为 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

12. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 为线段 BC 上的动点 (不含端点), 将 $\triangle ABE$ 沿 AE 翻折, 使得二面角 $B-AE-D$ 为直二面角, 得到图 2 所示的四棱锥 $B-AECD$, 点 F 为线段 BD 上的动

点(不含端点),则在四棱锥 $B-AECD$ 中,下列说法正确的有

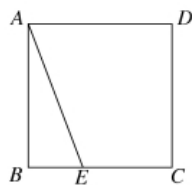


图 1

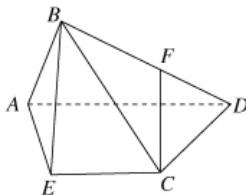
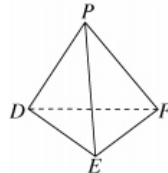
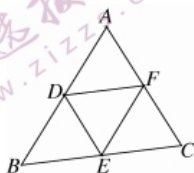


图 2

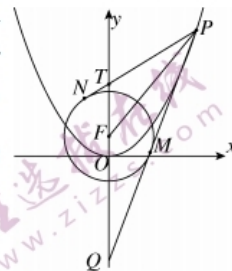
- A. B, E, C, F 四点不共面
B. 存在点 F , 使得 $CF \parallel$ 平面 BAE
C. 三棱锥 $B-ADC$ 的体积为定值
D. 存在点 E 使得直线 BE 与直线 CD 垂直

三、填空题:本大题有 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在题中横线上.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 则 $a_{2021} =$ _____.
14. 二项式 $(3x + \frac{2}{x})^6 (n \in \mathbf{N}^*)$ 的展开式中 x^2 的系数为 _____.(用数字作答)
15. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 8, BC + AC = 12$, 分别取三边的中点 D, E, F , 将 $\triangle BDE, \triangle ADF, \triangle CEF$ 分别沿三条中位线折起, 使得 A, B, C 重合于点 P , 则当三棱锥 $P-DEF$ 的外接球的体积最小时, 其外接球的半径为 _____, 三棱锥 $P-DEF$ 的体积为 _____.



16. 如图, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F, P 为抛物线 C 在第一象限内的一点, 抛物线 C 在点 P 处的切线 PM 与圆 F 相切(切点为 M) 且交 y 轴于点 Q , 过点 P 作圆 F 的另一条切线 PN (切点为 N) 交 y 轴于 T 点. 若已知 $|FQ| = |FP|$, 则 $|FT|$ 的最小值为 _____.



四、解答题:本大题有 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 在 ① $a \sin(A + C) = b \cos(A - \frac{\pi}{6})$, ② $1 + 2 \cos C \cos B = \cos(C - B) - \cos(C + B)$, ③ $\frac{2 \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{b}{c}$

这三个条件中任选一个, 补充到下面的横线上并作答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b + c = 2\sqrt{3}, a = \sqrt{6}$, _____. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

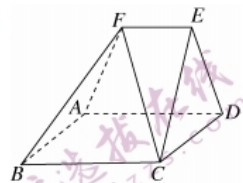
18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} - a_n + 2a_{n+1}a_n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$.
- (1) 证明: 数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 设 S_n 为数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的前 n 项和, 证明 $S_n < \frac{1}{4}$.

19. (12分) 如图, 在五面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,

$EF \parallel BC, EF = 2, CE = DE, CE \perp DE$, 平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 求证: $DE \perp$ 平面 $EFBC$;

(2) 求二面角 $A-BF-C$ 的余弦值.



20. (12分) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与椭圆 $E: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有共同的焦点, 且椭圆 C 的离心率 $e = \frac{1}{2}$. 点 M, F 分别为椭圆 C 的左顶点和右焦点, 直线 l 过点 F 且交椭圆 C 于 P, Q 两点,

设直线 MP, MQ 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 是否存在直线 l , 使得 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{4}$, 若存在, 求出直线 l 方程; 不存在, 说明理由.

21. (12分) 下围棋既锻炼思维又愉悦身心, 有益培养人的耐心和细心, 舒缓大脑并让其得到充分休息. 现某学校围棋社团为丰富学生的课余生活, 举行围棋大赛, 要求每班选派一名围棋爱好者参赛. 现某班有 12 位围棋爱好者, 经商议决定采取单循环方式进行比赛, (规则采用“中国数目法”, 没有和棋.) 即每人进行 11 轮比赛, 最后靠积分选出第一名去参加校级比赛. 积分规则如下 (每轮比赛采取 5 局 3 胜制, 比赛结束时, 取胜者可能会出现 3:0, 3:1, 3:2 三种赛式).

	3:0 或 3:1	3:2
胜者积分	3 分	2 分
负者积分	0 分	1 分

9 轮过后, 积分榜上的前两名分别为甲和乙, 甲累计积分 26 分, 乙累计积分 22 分. 第 10 轮甲和丙比赛, 设每局比赛甲取胜的概率均为 $\frac{2}{3}$, 丙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$, 各局比赛结果相互独立.

(1) (i) 在第 10 轮比赛中, 甲所得积分为 X , 求 X 的分布列;

(ii) 求第 10 轮结束后, 甲的累计积分 Y 的期望;

(2) 已知第 10 轮乙得 3 分, 判断甲能否提前一轮获得累计积分第一, 结束比赛. (“提前一轮”即比赛进行 10 轮就结束, 最后一轮即第 11 轮无论乙得分结果如何, 甲累计积分最多)? 若能, 求出相应的概率; 若不能, 请说明理由.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{kx}{x+1} + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) (i) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 求正整数 k 的最大值.

(ii) 证明: $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{n(2-\frac{3}{n+1})}$.

2021 届高三 二轮复习联考(一) 新高考卷
数学参考答案及评分意见

1. C 【解析】因为 $A = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$, $B = \{0, 1, 2\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 C.
2. A 【解析】由 $z = \frac{2+i}{3+i} = \frac{(2+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{7+i}{10}$, 则 $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.
3. C 【解析】 $|a| = 1, |b| = 1$, 所以 $|b - 2a| = \sqrt{(b - 2a)^2} = \sqrt{b^2 - 4a \cdot b + 4a^2} = \sqrt{5 - 4a \cdot b} = \sqrt{3}$. 解得 $a \cdot b = \frac{1}{2}$. 故选 C.
4. B 【解析】 $\cos(\alpha - \frac{5\pi}{12}) = \cos[(\alpha + \frac{\pi}{12}) - \frac{\pi}{2}] = \sin(\alpha + \frac{\pi}{12}) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 B.
5. B 【解析】函数为奇函数, 排除 C. 又因为 $f(1) = \frac{\cos 1}{e} < \frac{1}{2}$, 故选 B.
6. C 【解析】因为 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{2}} \in (\sqrt{5}, \sqrt{10})$, 所以 $b \in (2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, 而 C 的焦点到渐近线的距离为 b. 所以形离的取值范围为 $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. 故选 C.
7. B 【解析】由题意可知三年修完四门课程, 则每位同学每年所修课程数为 1, 1, 2 或 0, 1, 3 或 0, 2, 2. 若是 1, 1, 2, 则先将 4 门学科分成三组共 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{A_2}$ 种不同方式, 再分配到三个学年共有 A_3^3 种不同分配方式, 由乘法原理可得共有 $\frac{C_4^1 C_3^1 C_2^2}{A_2} \cdot A_3^3 = 36$ 种; 若是 0, 1, 3, 则先将 4 门学科分成三组共 $C_4^1 C_3^3$ 种不同方式, 再分配到三个学年共有 A_3^3 种不同分配方式, 由乘法原理可得共有 $C_4^1 C_3^3 \cdot A_3^3 = 24$ 种; 若是 0, 2, 2, 则先将 4 门学科分成三组共 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2}$ 种不同方式, 再分配到三个学年共有 A_3^3 种不同分配方式, 由乘法原理可得共有 $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2} \cdot A_3^3 = 18$ 种. 所以每位同学的不同选修方式有 $36 + 24 + 18 = 78$ 种. 故选 B.
8. D 【解析】函数 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} , 令 $g(x) = f(x) - 1 = x + \frac{2}{1+e^x} - 1$, 易知 $y = x$ 和 $y = \frac{2}{1+e^x} - 1$ 均为奇函数, 所以 $g(x)$ 为奇函数, $g'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 由 $f(m-9) + f(2n) = 2$ 得 $f(m-9) - 1 + f(2n) - 1 = 0$, 即 $g(m-9) = -g(2n) = g(-2n)$, 所以 $m-9+2n=0$, 即 $m+2n=9$. 则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{9}(m+2n)(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}) = \frac{1}{9}(2+2+\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}) \geq \frac{1}{9}(4+4) = \frac{8}{9}$. 故选 D.

9. ABD 【解析】对于 A 选项:若 $xc^2 > yc^2$, 则 $c^2 \neq 0$, 则 $x > y$, 反之 $x > y$, 当 $c = 0$ 时得不出 $xc^2 > yc^2$, 所以 $xc^2 > yc^2$ 是 $x > y$ 的充分不必要条件, 故 A 正确; 对于 B 选项: 由 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ 可得 $y < x < 0$, 即能推出 $x > y$; 但 $x > y$ 不能推出 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ (因为 x, y 的正负不确定), 所以 $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < 0$ 是 $x > y$ 的充分不必要条件. 故 B 正确; 对于 C 选项: 由 $|x| > |y|$ 可得 $x^2 > y^2$, 则 $(x+y)(x-y) > 0$, 不能推出 $x > y$; 由 $x > y$ 也不能推出 $|x| > |y|$ (如 $x = 1, y = -2$), 所以 $|x| > |y|$ 是 $x > y$ 的既不充分也不必要条件, 故 C 错误; 对于 D 选项: 若 $\ln x > \ln y$, 则 $x > y$, 反之 $x > y$ 得不出 $\ln x > \ln y$, 所以 $\ln x > \ln y$ 是 $x > y$ 的充分不必要条件, 故选项 D 正确. 故选 ABD.

10. ACD 【解析】由折线图知 100 以上有 10 个, 100 以下有 10 个, 中位数是 100 两边两个数的均值, 观察比 100 的数离 100 远点, 因此两者均值大于 100 但小于 150, A 错; 空气质量为优的有 5 天, 占 $\frac{1}{4}$, B 正确; 10 月 4 日到 10 月 11 日, 空气质量越来越好差, C 错; 10 月上旬的空气质量 AQI 指数值在 100 以下的多, 中旬的空气质量 AQI 指数值在 100 以上的多, 下旬的空气质量比中旬的空气质量好, D 错. 故选 ACD.

11. BD 【解析】因为 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 1 = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$, A 中最小正周期为 π , 故 A 错; B 中, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$ 取得最小值, 故 B 正确; C 中, $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)$ 单调递增, 故 C 错误; D 中, $f(0) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$, 结合函数 $f(x)$ 的图象可知, 当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时, $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$. 由对称性可知 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f(0) = 0$, 所以 $a \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, 故 D 正确. 故选 BD.

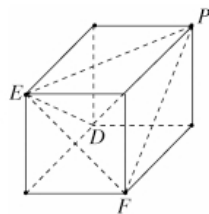
12. AB 【解析】A. 假设直线 BE 与直线 CF 在同一平面上, 所以 E 在平面 BCF 上, 又 E 在线段 BC 上, $BC \cap$ 平面 $BCF = C$, 所以 E 与 C 重合, 与 E 异于 C 矛盾, 所以直线 BE 与直线 CF 必不在同一平面上, 即 B, E, C, F 四点不共面, 故 A 正确; B. 当点 F 为线段 BD 中点时, $EC = \frac{1}{2}AD$, 再取 AB 的中点 G , 则 $EC \parallel FG$ 且 $EC = FG$, 四边形 $ECFG$ 为平行四边形, 所以 $FC \parallel EG$, 则直线 CF 与平面 BAE 平行, 故 B 正确; C. 由题 V_{B-ADC} , 但 E 的移动会导致点 B 到平面 ACD 的距离在变化, 所以 $B-ADC$ 的体积不是定值, 故 C 错; D. 过 B 作 $BO \perp AE$ 于 O , 因为平面 $BAE \perp$ 平面 $AECD$, 平面 $BAE \cap$ 平面 $AECD = AE$, 所以 $BO \perp$ 平面 $AECD$. 过 D 作 $DH \perp AE$ 于 H , 因为平面 $BAE \perp$ 平面 $AECD$, 平面 $BAE \cap$ 平面 $AECD = AE$, 所以 $DH \perp$ 平面 BAE , 所以 $DH \perp$

BE. 若存在点 E 使得直线 BE 与直线 CD 垂直, $DH \subset$ 平面 AECD, $DC \subset$ 平面 AECD, $DH \cap DC = D$, 所以 $BE \perp$ 平面 AECD, 所以 E 与 O 重合, 与三角形 ABE 是以 B 为直角的三角形矛盾, 所以不存在点 E 使得直线 BE 与直线 CD 垂直. 故选 AB.

13. -1 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$, 则 $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} = -1, a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} = 2, a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$, 以此类推可知, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+3} = a_n$, 即数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列, 因为 $2021 = 3 \times 673 + 2$, 因此 $a_{2021} = a_2 = -1$.

14. 4860 【解析】二项式展开式中的第 r 项 $T_{r+1} = C_n^r (3x)^{n-r} (\frac{2}{x})^r = 2^n \cdot 3^{6-r} \cdot C_6^r \cdot x^{6-2r}$, $6-2r = 2$, 则 $r=2$, 此时 $T_3 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot C_6^2 \cdot x^2 = 4860x^2$, 所以 x^2 的系数为 4860.

15. $\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{8}{3}$ 【解析】由题意得三棱锥 P-DEF 的对棱分别相等, 设 $BC = 2a$, 则 $AC = 12 - 2a$. 将三棱锥 P-DEF 补充成长方体, 则对角线长分别为 a, 6-a, 4, 三棱锥 P-DEF 的外接球即为长方体的外接球.



设长方体的长宽高分别为 x, y, z,

$$\text{则 } x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = (6-a)^2, x^2 + z^2 = 16,$$

$$\text{所以 } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 6a + 26,$$

$$\text{则外接球半径 } r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 - 6a + 26}}{2},$$

当 $a=3$ 时, 半径最小, 此时三棱锥 P-DEF 的外接球的体积最小, 此时 $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

$$\text{解得 } x = z = 2\sqrt{2}, y = 1.$$

$$\text{所以三棱锥 } V_{P-DEF} = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 1 = \frac{8}{3}.$$

16. $\frac{16}{9}$ 【解析】 $F(0,1)$, 设 $P(2t, t^2)$, 且 $|FQ| = |FP|$, 则 $Q(0, -t^2)$, 抛物线 $y = \frac{x^2}{4}, y' = \frac{x}{2}$, 所以

以 $k_{PM} = t$.

不妨设 $\angle FQP = \theta$, 则 $\tan \theta = \frac{1}{t}, \angle NTF = 3\theta$. 在 $\triangle PFT$ 中, 由正弦定理得

$$|FT| = \frac{|PF| \sin \theta}{\sin 3\theta} = \frac{t^2 + 1}{3 \cdot 4 \sin^2 \theta} = \frac{(t^2 + 1)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \frac{(t^2 + 1)(\tan^2 \theta + 1)}{3 - \tan^2 \theta} = \frac{(t^2 + 1)^2}{3t^2 - 1}$$

所以 $\angle PTy = 3\theta < \pi$, 所以 $\theta < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\tan \theta < \sqrt{3}$, 所以 $3t^2 - 1 > 0$

$$\text{所以 } \frac{(t^2+1)^2}{3t^2-1} = \frac{[(3t^2-1)+4]^2}{9(3t^2-1)} = \frac{(3t^2-1)}{9} + \frac{16}{9(3t^2-1)} + \frac{8}{9} \geq \frac{16}{9}.$$

当且仅当 $(3t^2-1)=4$ 时, 即 $t^2 = \frac{5}{3}$ 时, $|FT|_{\min} = \frac{16}{9}$.

17. 解: 若选①, 由正弦定理得 $\sin A \sin B = \sin B \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $0 < B < \pi$,

$$\text{所以 } \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \sin A = \cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{化简得 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A.$$

$$\text{所以 } \cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5分

$$\text{因为 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{6}, b+c = 2\sqrt{3},$$

所以 $bc = 2$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

选② 因为 $1 + 2\cos C \cos B = \cos(C-B) - \cos(C+B)$,

$$\text{所以 } 1 - \cos(C-B) + \cos(C+B) + 2\cos C \cos B = 1 + 2\cos(C+B) = 1 - 2\cos A = 0,$$

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 因为 C 为三角形的内角, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5分

$$\text{因为 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{6}, b+c = 2\sqrt{3},$$

所以 $bc = 2$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

选③ 因为 $\frac{2 \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{b}{c}$,

$$\text{所以由正弦定理可得: } \frac{2 \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{\sin B}{\sin C}, \text{ 可得: } \frac{2 \times \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

$$\text{可得: } \frac{\frac{2 \sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B}} = \frac{\frac{2 \sin B}{\cos B}}{\frac{\sin C}{\cos A \cos B}} = \frac{2 \sin B \cos A}{\sin C} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

因为 $\sin B \neq 0, \sin C \neq 0$,

所以解得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5分

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{6}, b + c = 2\sqrt{3}$,

所以 $bc = 2$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 10分

18. 证明: (1) 由题对 $a_{n+1} - a_n + 2a_{n+1}a_n = 0$ 两边同时除以 $a_n a_{n+1}$ 得 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$ 2分

又 $\frac{1}{a_1} = 2$, 所以 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 2, 公差为 2 的等差数列. 4分

所以 $\frac{1}{a_n} = 2 + 2(n-1) = 2n$, 所以 $a_n = \frac{1}{2n}$ 6分

(2) 由(1) $a_n a_{n+1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{4} \times (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ 8分

所以 $S_n = \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{4} \times (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)}$

..... 10分

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{4}$. 即 $S_n < \frac{1}{4}$ 12分

19. (1) 证明: 因为平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $CDE \cap$ 平面 $ABCD = CD, \parallel BC \perp CD$

所以 $BC \perp$ 平面 CDE ,

又因为 $DE \subset$ 平面 CDE ,

所以 $BC \perp DE$

因为 $CE \perp DE, BC \cap CE = C, BC \subset$ 平面 $EFBC, CE \subset$ 平面 $EFBC$,

所以 $DE \perp$ 平面 $EFBC$ 5分

(2) 如图, 取 CD, AB 中点 O, P , 连结 EO, OP .

因为平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD, \triangle CDE$ 为等腰直角三角形,

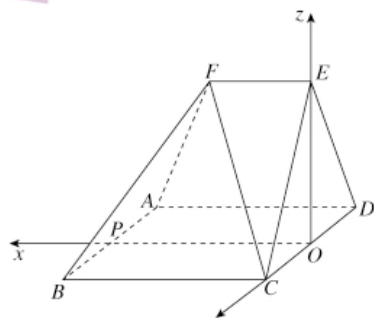
所以 $EO \perp$ 平面 $ABCD$.

易知 OP, OC, OE 三条直线两两垂直,

分别以 OP, OC, OE 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.

则 $A(4, -2, 0), B(4, 2, 0), C(0, 2, 0), D(0, -2, 0),$

$E(0, 0, 2), F(2, 0, 2), \vec{AB} = (0, 4, 0), \vec{FB} = (2, 2, -2),$



设平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FB} = 0 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} 4y = 0, \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \text{ 得 } \mathbf{n} = (1, 0, 1).$$

由(1)知 $DE \perp$ 平面 $EFBC$, 所以平面 BFC 的法向量为 $\overrightarrow{DE} = (0, 2, 2)$.

$$\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

由图可知二面角 $A-BF-C$ 为钝角,

所以二面角 $A-BF-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{2}$ 12 分

20. 解:(1)由题可知椭圆 C 中, $c = 1$,

由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 可得 $a = 2$,

又知 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(2)右焦点 $F(1, 0)$, 右顶点 $M(-2, 0)$. 假设存在直线 l , 满足 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{4}$.

若直线 l 斜率不存在时, $k_1 + k_2 = 0$, 不合题意, 舍去;

$$\text{设直线 } l \text{ 的方程为 } y = k(x - 1), \text{ 联立方程 } \begin{cases} y = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}.$$

化简得 $(3 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$.

由题意易知 $\Delta > 0$ 恒成立,

设直线 l 与椭圆 C 的两个交点为 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

根据韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2}$,

则 $k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{k(x_1 - 1)}{x_1 + 2} + \frac{k(x_2 - 1)}{x_2 + 2}$,

$$\begin{aligned}
 &= k \cdot \frac{2x_1x_2 + (x_1 + x_2) - 4}{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \\
 &= k \cdot \frac{2 \cdot \frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} + \frac{8k^2}{3 + 4k^2} - 4}{\frac{4k^2 - 12}{3 + 4k^2} + 2 \cdot \frac{8k^2}{3 + 4k^2} + 4} \\
 &= k \cdot \frac{8k^2 - 24 + 8k^2 - 4(3 + 4k^2)}{4k^2 - 12 + 16k^2 + 4(3 + 4k^2)} \\
 &= -\frac{1}{k} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

所以 $k = 4$,

即直线 $l: y = 4(x - 1)$, 化简得 $4x - y - 4 = 0$.

综上所述, 存在直线 $l: 4x - y - 4 = 0$, 满足 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{4}$ 12 分

21. 解: (1) (i) X 的可能取值为 3, 2, 1, 0.

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27},$$

$$P(X=2) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81},$$

$$P(X=1) = C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81},$$

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 + C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

所以 X 的分布列为

X	3	2	1	0
P	$\frac{16}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{9}$

..... 6 分

(ii) Y 的可能取值为 29, 28, 27, 26

$$\text{则 } E(Y) = \frac{16}{27} \times 29 + \frac{16}{81} \times 28 + \frac{8}{81} \times 27 + \frac{1}{9} \times 26 = \frac{2290}{81}. \text{ 8 分}$$

(2) 若 $X = 3$, 则甲 10 轮后的总积分为 29 分, 乙即便第 10 轮和第 11 轮都得 3 分, 则 11 轮过后的总积分是 28 分, $29 > 28$, 所以, 甲如果第 10 轮积 3 分, 则可提前一轮结束比赛, 其概率为 $P(X=3) = \frac{16}{27}$ 12 分

22. 解: (1) 定义域 $(-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{x+1-k}{(x+1)^2}$

当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 无极值;

当 $k > 0$ 时, $f'(x) > 0$ 得 $x > k-1$, $f'(x) < 0$ 得 $-1 < x < k-1$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, k-1)$ 上单调递减, 在 $(k-1, +\infty)$ 上单调递增.

此时函数 $f(x)$ 的极小值 $f(k-1) = \ln k - k + 2$. 无极大值.

综上, 当 $k \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值; 当 $k > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $\ln k - k + 2$. 无极大值.

.....4分.....

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 即只需 $f(x)_{\min} > 0$ 成立即可.

由(1)可知

当 $k > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, k-1)$ 上单调递减, 在 $(k-1, +\infty)$ 上单调递增.

(i) 若 $k-1 \leq 0$, 即 $k \leq 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} > f(0) = 1$ 满足题意;

(ii) 若 $k-1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, k-1)$ 上单调递减, 在 $(k-1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)_{\min} = f(k-1) = \ln k - k + 2 > 0$

令 $g(x) = \ln x - x + 2$, $g'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又知 $g(2) = \ln 2 > 0$, $g(3) = \ln 3 - 1 > 0$, $g(4) = \ln 4 - 2 < 0$.

所以 $\exists x_0 \in (3, 4)$ 使得 $g(x_0) = 0$, 则 $g(x) = \ln x - x + 2 > 0$ 的解集为 $(1, x_0)$.

综上 k 的取值范围为 $(-\infty, x_0)$, $x_0 \in (3, 4)$, 所以正整数 k 的最大值为 3.8分

(ii) 证明: 两边取对数得 $\ln(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > 2n - \frac{3n}{n+1}$,

即只需证 $\ln(1+1 \times 2) + \ln(1+2 \times 3) + \cdots + \ln[1+n(n+1)] > 2n - \frac{3n}{n+1}$.

由(i)知 $\ln(x+1) > \frac{3x}{x+1} - 1 = 2 - \frac{3}{x+1}$,

令 $x = n(n+1)$, 则 $\ln[n(n+1)+1] > 2 - \frac{3}{n(n+1)+1} > 2 - \frac{3}{n(n+1)} = 2 - (\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1})$.

所以 $\ln(1+1 \times 2) + \ln(1+2 \times 3) + \cdots + \ln[1+n(n+1)]$

$> 2n - 3(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 2n - \frac{3n}{n+1}$.

所以 $(1+1 \times 2)(1+2 \times 3) \cdots [1+n(n+1)] > e^{2n - \frac{3n}{n+1}}$12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》