

[试卷免费提供]

贵阳市 2023 年高三适应性考试 (二)

文科数学参考答案

2023 年 5 月

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	C	B	C	C	C	A	B	D	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{27}$	8π	①②③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (1) 由已知及正弦定理得

$$\sin A \cos C - \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin B + \sqrt{3} \sin C = 0$$

因为 $\sin B = \sin(A+C)$

$\sin C \neq 0$

$$\text{整理有 } \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{又因为 } A \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{所以 } A = \frac{\pi}{6}$$

.....6 分

(2) (方法一) 由 (1) 及余弦定理得

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc & \text{①} \\ b^2 = a^2 + ac & \text{②} \end{cases}$$

联立①②得

$$c - \sqrt{3}b + a = 0$$

由正弦定理得

$$\sin C - \sqrt{3} \sin B + \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} - B\right) - \sqrt{3} \sin B + \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{整理得 } \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{\pi}{3}$$

文科数学第1页 (共6页)

所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形

(方法二)

因为 $b^2 - a^2 = ac$

又因为 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a+c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

得 $a+c = \sqrt{3}b$

所以 $b^2 = a^2 + ac = a(a+c)$

得 $b = \sqrt{3}a$

又由 $2a^2 = ac$ 得 $c = 2a$

所以 $c^2 = a^2 + b^2$

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形

.....12 分

18.解:

(1) 三个学习群人数比例为 24000: 24000: 36000 = 2: 2: 3

因此, 应从 A、B、C 三个学习群分别匹配 2, 2, 3 人。

.....6 分

(2) (i) 所有可能的结果为:

$(m_1, m_2), (m_1, m_3), (m_1, m_4), (m_1, m_5), (m_1, m_6), (m_1, m_7), (m_2, m_3), (m_2, m_4), (m_2, m_5),$

$(m_2, m_6), (m_2, m_7), (m_3, m_4), (m_3, m_5), (m_3, m_6), (m_3, m_7), (m_4, m_5), (m_4, m_6),$

$(m_4, m_7), (m_5, m_6), (m_5, m_7), (m_6, m_7)$ 共 21 种。

(ii) “抽取的 2 名学员不是来自同一个学习群”的情况有 16 种,

所以其概率 $P(M) = \frac{16}{21}$

.....12 分

19.解: (1) $\because \lambda = \frac{1}{2} \therefore D$ 为线段 BC_1 的中点,

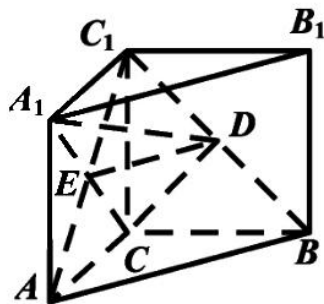
连结 AC_1 , 且 $AC_1 \cap A_1C = E$, 又连结 DE ,

易知 E 是线段 AC_1 的中点,

于是, DE 是 $\triangle C_1AB$ 的中位线, 即 $DE \parallel AB$,

且 $DE \subset$ 平面 A_1CD , $AB \not\subset$ 平面 A_1CD ,

综上, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $AB \parallel$ 平面 A_1CD .



文科数学第2页 (共6页)

.....6分

(2) (法一) $\because$ 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 得 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore$ 平面 $A_1C_1D \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

又 $\because$ 平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1C_1D , 且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $A_1CD = CD$,

$\therefore CD \perp$ 平面 A_1C_1D ,

$\therefore CD \perp C_1B$, 即 D 为 BC_1 的中点, 且 D 到平面 A_1C_1C 的距离为 $h = \frac{1}{2}BC = 1$,

$\therefore V_{C-A_1C_1D} = V_{D-A_1C_1C} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} A_1C_1 \times CC_1 \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{4}{3}$

.....12分

(法二) 过 C 作 $CF \perp A_1D$ 交 A_1D 于 F , 且点 F 异于点 D ,

$\because$ 平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1C_1D ,

$\therefore CF \perp$ 平面 A_1C_1D ,

又 $\because A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1D ,

$\therefore CF \perp A_1C_1$,

又由 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 得 $A_1C_1 \perp CD$, 且 $CD \cap CF = C$,

$\therefore A_1C_1 \perp$ 平面 CDF , 即 $A_1C_1 \perp$ 平面 A_1CD ,

$\therefore A_1C_1 \perp A_1C$, (与 $\triangle A_1C_1C$ 中 $\angle A_1C_1C = 90^\circ$ 矛盾)

$\therefore$ 点 F 与点 D 重合, 即当平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1C_1D 时, $CD \perp$ 平面 A_1C_1D ,

$\therefore CD \perp C_1B$, 即 D 为 BC_1 的中点, 且 D 到平面 A_1C_1C 的距离为 $h = \frac{1}{2}BC = 1$,

$\therefore V_{C-A_1C_1D} = V_{D-A_1C_1C} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} A_1C_1 \times CC_1 \times h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 1 = \frac{4}{3}$

.....12分

20. 解: (1) $\because$ 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的离心率相等,

$\therefore a^2 = 2b^2$, 又由 $a^2 = b^2 + \sqrt{2}^2$, $\therefore a^2 = 4, b^2 = 2$,

故, C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

文科数学第3页 (共6页)

.....6分

(2) 设 $T(t, 0)$, $P(4, p)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则直线 AB 方程为 $x = my + t$, 即有 $mp = 4 - t$,

由 $\frac{PA}{PB} = \frac{AT}{TB}$, 可得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{TB} - \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AT} = 0$,

于是有, $(x_1 - 4)(x_2 - t) + (y_1 - p)(y_2 - 0) + (x_2 - 4)(x_1 - t) + (y_2 - p)(y_1 - 0) = 0$

化简得: $2x_1x_2 + 2y_1y_2 - (t + 4)(x_1 + x_2) - p(y_1 + y_2) + 8t = 0$,

变形得: $(2m^2 + 2)y_1y_2 + (mt - 4m - p)(y_1 + y_2) = 0$ (*)

由 $\begin{cases} x = my + t \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 2)y^2 + 2mty + (t^2 - 4) = 0$

当 $\Delta = 4m^2t^2 - 4(m^2 + 2)(t^2 - 4) > 0$ 时, $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{m^2 + 2} \\ y_1y_2 = \frac{t^2 - 4}{m^2 + 2} \end{cases}$,

将上式与 $mp = 4 - t$ 共同代入 (*), 化简得: $(t - 1)(m^2 + 1) = 0$, 即 $t = 1$, 且此时 $\Delta > 0$ 成立,

故存在 x 轴上定点 $T(1, 0)$, 使得 $\frac{PA}{PB} = \frac{AT}{TB}$.

.....12分

21. 解: (1) 设切点 $M(x_0, x_0e^{x_0})$, 则由 $f(x) = xe^x$, 可得 $f'(x) = (x + 1)e^x$,

$\therefore f'(x_0) = k_{PM}$, $\therefore (x_0 + 1)e^{x_0} = \frac{x_0e^{x_0} - 0}{x_0 - t}$, 化简得: $x_0^2 - tx_0 - t = 0$,

依题意 $\Delta = t^2 + 4t = 0$, 解得 $t = 0$ 或 $t = -4$,

综上, $t = 0$ 或 $t = -4$ 时, 过点 P 作曲线 $f(x) = xe^x$ 的切线有且仅有一条.

.....6分

(2) 依题意, 由 $x \in (0, +\infty)$, 所以, $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow a \leq e^x - \frac{\ln x + 1}{x}$

设 $h(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{x^2e^x + \ln x}{x^2}$,

设 $m(x) = x^2e^x + \ln x$, 易知 $m'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$, 即 $m(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

且 $x \rightarrow 0$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $m(x) \rightarrow +\infty$,

$\therefore$ 令 $m(x) = x^2e^x + \ln x = 0$, 则该方程有唯一解 x_0 ,

使得在 $x \in (0, x_0)$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 在 $x \in (x_0, +\infty)$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

文科数学第4页 (共6页)

即 $x = x_0$ 是函数 $h(x)$ 极小值点, 且有 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$,

上式变形得: $x_0 e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} \xrightarrow{\text{对数恒等式}} x_0 \cdot e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot e^{\ln \frac{1}{x_0}} \Rightarrow f(x_0) = f(\ln \frac{1}{x_0}), (*)$

由 (1) 可知 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 单调递增,

则 (*) 可得 $x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$, 即有 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ 与 $\ln x_0 = -x_0$

$\therefore h(x) \geq h(x_0) = e^{x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{-x_0 + 1}{x_0} = 1$, 即 $a \leq 1$,

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

解法二:

由 $x \in (0, +\infty)$, 以及切线不等式: $e^x \geq x + 1$, ($x = 0$ 时取等号)

$\therefore f(x) = x e^x = e^{\ln x} \cdot e^x = e^{\ln x + x} \geq \ln x + x + 1$

$\therefore$ 当 $a \leq 1$ 时, $f(x) \geq \ln x + x + 1 \geq \ln x + ax + 1 = g(x)$, 即此时, $f(x) \geq g(x)$ 成立

又当 $a > 1$ 时, 存在 $x_0 > 0$ 满足 $\ln x_0 = -x_0$, 即 $x_0 e^{x_0} = 1$,

此时, $f(x) - g(x) = x_0 e^{x_0} - ax_0 - \ln x_0 - 1 = (1 - a)x_0 < 0$, 不合题意.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

.....12 分

22. (1) 由 C_1 的参数方程得

$$\begin{cases} x^2 = t^2 + \frac{64}{t^2} + 16 \\ y^2 = t^2 + \frac{64}{t^2} - 16 \end{cases}$$

所以 $x^2 - y^2 = 32$

故 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos 2\theta = 32$

.....5 分

(2)

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho^2 \cos 2\theta = 32 \end{cases} \Rightarrow \rho_A = 8, \quad \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{6} \\ \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \rho_B = 3$$

$\therefore |AB| = |\rho_A - \rho_B| = 5$

又 $\because$ 点 $P(4, 0)$ 到射线的距离为 2

$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |AB| = 5$

文科数学第5页 (共6页)

.....10 分

23. (1) 由柯西不等式得

$$[a^2 + (2b)^2 + (2c)^2] \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + 2b + 2c)^2$$

$$\therefore (a + 2b + 2c)^2 \leq 81$$

$$\therefore a + 2b + 2c \leq 9$$

当且仅当 $a = 2b = 2c$ 时取等号

即 $a = 3, b = \frac{3}{2}, c = \frac{3}{2}$ 时取等号

$$\therefore a + 2b + 2c \leq 9$$

.....5 分

(2) $\because b = c, a > 0, b > 0, c > 0$

由 (1) $a + 4b \leq 9$ 得

$$\frac{1}{a + 4b} \geq \frac{1}{9}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + 4b) = 5 + \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 9$$

当且仅当 $a = 2b$ 时, 即 $a = 3, b = \frac{3}{2}$ 时取等号,

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a + 4b} \times 9$$

$$\text{即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$$

.....10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线