

2022-2023 学年第二学期六校联合体期末联合调研

高一数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D 2. C 3. B 4. D 5. A 6. A 7. C 8. B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AB 10. BC 11. ABD 12. ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

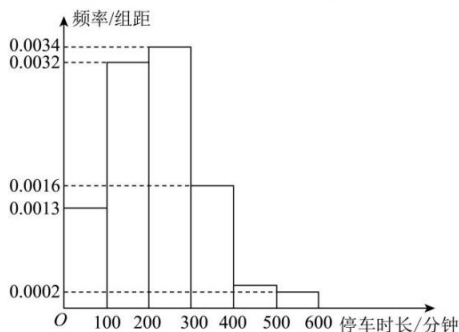
13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 14. $\frac{3}{2}$ 15. $\frac{21}{5}$ 16. $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}, (20-8\sqrt{6})\pi$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

某商场为了制定合理的停车收费政策，需要了解顾客的停车时长（单位：分钟）。现随机抽取了该商场到访顾客的 100 辆车进行调查，将数据分成 6 组：(0,100]，(100,200]，

(200,300]，(300,400]，(400,500]，(500,600]，并整理得到如下频率分布直方图：



(1) 若某天该商场到访顾客的车辆数为 1000，根据频率分布直方图估计该天停车时长在区间(400,600]上的车辆数；

(2) 为了吸引顾客，该商场准备给停车时长较短的车辆提供免费停车服务。若以 30 百分位数为标准，请你根据频率分布直方图，给出确定免费停车时长标准的建议(数据取整数)。

解：(1) 根据频率分布直方图中所有频率和为 1，设(400,500]的频率为 x ，可列等式为

$$(0.0002+0.0013+0.0016+0.0032+0.0034)\times 100+x=1 \therefore x=0.03$$

所以样本中停车时长在区间(400,600]上的频率为 0.05，估计该天停车时长在区间(400,600]

上的车辆数是 50;5 分

(2) 设免费停车时间长不超过 y 分钟, 又因为 $(0,100]$ 的频率为 $0.13 < 30\%$, 并且 $(0,200]$ 的频率为 $0.45 > 30\%$, 所以 y 位于 $(100,200]$ 之间, 则满足

$$0.13 + (y-100) \times 0.0032 = 0.3 \therefore y = 153.1$$

确定免费停车时长为不超过 153 分钟5 分

18. (12 分)

已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}), \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(1) 求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值;

(2) 求 $2\alpha + \beta$ 的值.

解法 1(1) 由题意 $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{10}, \sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

所以 $\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 7$ 2 分

所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + 7}{1 - \frac{1}{2} \times 7} = -3$ 4 分

(2) 由 α, β 为锐角, 可得 $2\alpha + \beta \in (0, \frac{3\pi}{2})$ 1 分

$$\tan(2\alpha + \beta) = \tan[(\alpha + \beta) + \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha} = \frac{-3 + \frac{1}{2}}{1 - (-3) \times \frac{1}{2}} = -1$$

所以 $2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ 5 分

解法二: (1) 由题意: $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{10}, \sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = -3$

(2)由 α, β 为锐角, 可得 $2\alpha + \beta \in (0, \frac{3\pi}{2})$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(2\alpha + \beta) = \tan[(\alpha + \beta) + \alpha] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \alpha}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan \alpha} = \frac{-3 + \frac{1}{2}}{1 - (-3) \times \frac{1}{2}} = -1$$

$$\text{所以 } 2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$$

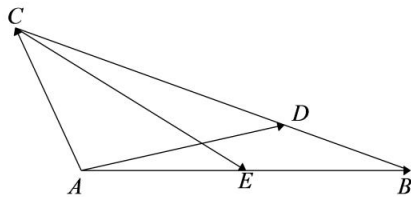
注: 若用 $\sin(2\alpha + \beta)$ 或 $\cos(2\alpha + \beta)$ 来求解 $2\alpha + \beta$ 应缩小角的范围

19. (12分)

已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=2, AC=1, \angle BAC=120^\circ$, 点 D 在边 BC 上且满足 $CD=2BD$.

(1)用 \vec{AB}, \vec{AC} 表示 \vec{AD} , 并求 $|\vec{AD}|$;

(2)若点 E 为边 AB 中点, 求 \vec{CE} 与 \vec{AD} 夹角的余弦值.



解: (1) $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$,3分

所以 $|\vec{AD}| = \left| \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ 3分

(2) 易知 $\vec{CE} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$

所以 $|\vec{CE}| = \left| \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC} \right| = \sqrt{3}$ 2分

又 $\vec{AD} \cdot \vec{CE} = \left(\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}\right) = \frac{3}{2}$ 2分

所以 $\cos \langle \vec{AD}, \vec{CE} \rangle = \frac{3\sqrt{39}}{26}$ 2分

20. (12分)

我校开展体能测试, 甲、乙、丙三名男生准备在跳远测试中挑战 2.80 米的远度, 已知每名男生有两次挑战机会, 若第一跳成功, 则等级为优秀, 挑战结束; 若第一跳失败, 则再跳

一次，若第二跳成功，则等级也为优秀，若第二跳失败，则等级为良好，挑战结束。已知甲、乙、丙三名男生成功跳过 2.80 米的概率分别是 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ，且每名男生每跳相互独立。记“甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中获得优秀”分别为事件 A, B, C 。

(1) 求 $P(A), P(B), P(C)$;

(2) 求甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中恰有两人获得良好的概率。

解：(1) 记“甲、乙、丙三名男生第 1 跳成功”分别为事件 A_1, B_1, C_1 ，记“甲、乙、丙三名男生第 2 跳成功”分别为事件 A_2, B_2, C_2 。

记“甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中获得“优秀”为事件 A, B, C 。

$$P(A) = P(A_1 + \bar{A}_1 A_2) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(B) = P(B_1 + \bar{B}_1 B_2) = P(B_1) + P(\bar{B}_1 B_2) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$P(C) = P(C_1 + \bar{C}_1 C_2) = P(C_1) + P(\bar{C}_1 C_2) = \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 记“甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中恰有两人获得良好”为事件 D ,

$$P(D) = P(\overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC}) = P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC}) + P(\overline{ABC})$$

$$= P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$$

$$= \frac{15}{16} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) + \left(1 - \frac{15}{16}\right) \times \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{5}{9}$$

$$= \frac{77}{576}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

答：(1) 甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中获得优秀的概率 $\frac{15}{16}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}$;

(2) 甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中恰有两人获得良好的概率 $\frac{77}{576}$ 。

21. (12 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a \cos C + \sqrt{3} a \sin C = b + c$ 。

(1) 求 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $b = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围。

解：(1) 由正弦定理可得： $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin B + \sin C$

所以 $\sin A \cos C + \sqrt{3} \sin A \sin C = \sin(A+C) + \sin C = \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin C$

所以 $\sqrt{3} \sin A \sin C = \cos A \sin C + \sin C$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $\sin C > 0$ ，所以 $\sqrt{3} \sin A = \cos A + 1$

所以 $\sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, 2分

因为 $A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$, 1分

所以 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 1分

(2) 由题设及(1)知 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

由正弦定理得 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin(120^\circ - B)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\tan B} + 1$ 2分

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 $0^\circ < B < 90^\circ$, $0^\circ < C < 90^\circ$.

由(1)知 $A + C = 120^\circ$,

所以 $30^\circ < B < 90^\circ$, 1分

故 $1 < c < 4$, 2分

从而 $\frac{\sqrt{3}}{2} < S_{\triangle ABC} < 2\sqrt{3}$.

因此 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$ 1分

解法二: (1)同上

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形且 $A = \frac{\pi}{3}$, 则 $\begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = bc \\ a^2 + b^2 > c^2 \\ a^2 + c^2 > b^2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4 + c^2 - a^2 = 2c \\ a^2 + 4 > c^2 \\ a^2 + c^2 > 4 \end{cases}$

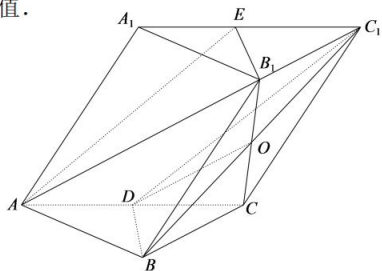
解得 $1 < c < 4$ 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}c \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3})$

22. (12分)

如图, 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$, 所有侧棱与底面边长均为 2, $\angle AA_1C_1 = 120^\circ$, D 是边 AC 中点.

- (1) 求证: $AB_1 \parallel$ 平面 BDC_1 ;
- (2) 求异面直线 BB_1 与 A_1C_1 所成的角;
- (3) F 是边 CC_1 一点, 且 $CF = \lambda CC_1$, 若 $AB_1 \perp A_1F$, 求 λ 的值.

解: (1) 如图, 连接 B_1C 与 BC_1 交于点 O , 连 DO ,



在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，
 四边形 BCC_1B_1 是平行四边形，
 则 O 是 B_1C 的中点，又 D 是 AC 中点，
 则 $AB_1 \parallel DO$ ，2 分
 又 $AB_1 \not\subset$ 平面 BDC_1 ， $DO \subset$ 平面 BDC_1 ，
 则 $AB_1 \parallel$ 平面 BDC_1 2 分

(2) 取 A_1C_1 的中点 E ，连 AE ，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面 $\triangle A_1B_1C_1$ 边长均为 2，
 则 $B_1E \perp A_1C_1$ ，
 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1C_1$ ， $B_1E \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$
 则 $B_1E \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，
 $\angle B_1AE$ 即为 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成角，2 分
 在 $\triangle B_1AE$ 中， $B_1E = \sqrt{3}$ ， $\tan \angle B_1AE = \frac{\sqrt{21}}{7}$ ，则 $AE = \sqrt{7}$ ，又 $AA_1 = 2$ ， $A_1E = 2$
 则在 $\triangle A_1AE$ 中， $\angle AA_1C_1 = 120^\circ$ ，则 $\angle A_1AC_1 = 60^\circ$ 1 分
 $AA_1 \parallel BB_1$ ， $A_1C_1 \parallel AC$ ，异面直线 BB_1 与 A_1C_1 所成的角为 $\angle A_1AC_1$ ，即为 60° 1 分

(3) 由 (2) 知 $B_1E \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，又 $A_1F \subset$ 平面 ACC_1A_1 ，则 $A_1F \perp B_1E$
 又 $A_1F \perp AB_1$ ， $B_1E \cap AB_1 = B_1$ ， $B_1E, AB_1 \subset$ 平面 AB_1E ，所以 $A_1F \perp$ 平面 AB_1E ，
 又 $AE \subset$ 平面 AB_1E ，则 $A_1F \perp AE$ 2 分

在菱形 ACC_1A_1 中，以 A 为坐标原点， AC 所在直线为 x 轴建系，

$$\overrightarrow{CF} = \lambda \overrightarrow{CC_1} = \lambda(1, \sqrt{3}) = (\lambda, \sqrt{3}\lambda), \text{ 又 } F(\lambda+2, \sqrt{3}\lambda), \text{ 所以 } \overrightarrow{A_1F} = (\lambda+1, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3})$$

又 $A_1F \perp AE$ ，则 $\overrightarrow{A_1F} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ ，所以 $\lambda = \frac{1}{5}$ 2 分

+

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线