大联考雅礼中学2024届高三月考试卷(一)

数学参考答案

一、二、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	D	A	C	D	B	B	A	C	ACD	BD	BCD	AC

1. D 【解析】$M=\{x\mid \log_2 x<4\}=\{x\mid 0<x<16\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，则 $M\cap N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x<16\right\}$. 故选：D.

2. A 【解析】由等差数列性质可知，$S_5=\frac{a_1+a_5}{2}\times 5=5a_3=35$，解得 $a_3=7$，故 $d=\frac{a_6-a_3}{6-3}=3$. 故选：A.

3. C 【解析】法一：由 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根，得 $z_1+z_2=2$，

所以 $z_2=2-z_1=2-(1+i)=1-i$，所以 $|z_2|=|1-i|=\sqrt{2}$.

法二：由 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根，得 $z_1\cdot z_2=2$，

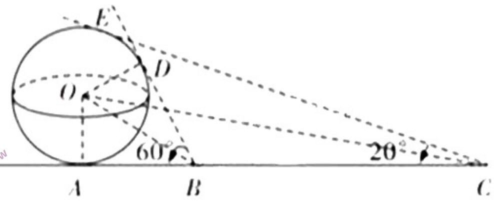
所以 $z_2=\frac{2}{z_1}=\frac{2}{1+i}$，所以 $|z_2|=\left|\frac{2}{1+i}\right|=\frac{2}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 故选：C.

4. D 【解析】令 $f(x)=\frac{x\sin x}{e^{|x|}}$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{-x\sin(-x)}{e^{|-x|}}=\frac{x\sin x}{e^{|x|}}=f(x)$，所以，函数 $y=\frac{x\sin x}{e^{|x|}}$ 为偶函数，排除 A、B 选项，当 $0<x<\pi$ 时，$\sin x>0$，则 $y=\frac{x\sin x}{e^{|x|}}>0$，排除 C 选项. 故选：D.

5. B 【解析】因为 $2x^2+kx-m<0$ 的解集为 $(t,-1)(t<-1)$，

所以 $x=-1$ 为方程 $2x^2+kx-m=0$ 的一个根，所以 $k+m=2$. 故选：B.

6. B 【解析】如图，设球的半径为 R，$AB=\sqrt{3}R$，$AC=\frac{R}{\tan 10^\circ}$，



$\because BC=\frac{R}{\tan 10^\circ}-\sqrt{3}R=100$，

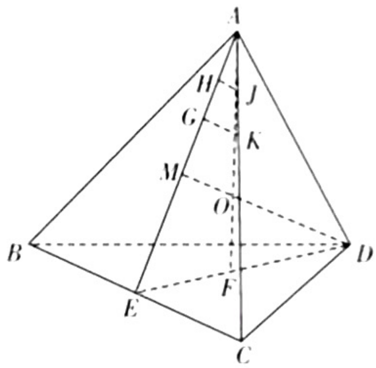
$\therefore R=\frac{100}{\frac{1}{\tan 10^\circ}-\sqrt{3}}=\frac{100\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}$

$=\frac{100\sin 10^\circ}{2\sin(30^\circ-10^\circ)}=\frac{50\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{50\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}=\frac{25}{\cos 10^\circ}=\frac{25}{0.985}$.

$\therefore 2R=\frac{50}{0.985}\approx 50.76$，故选：B.

7. A 【解析】因为 $f(1+x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2-x)=f(x)$，又由 $f(4+x)+f(-x)=0$，得 $f(4+x)=-f(-x)$，所以 $f(8+x)=-f(-4-x)=-f(6+x)$，所以 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，故 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2023)=f(3)=-f(1)=-1$. 故选：A.

8. C 【解析】如图，取 BC 的中点 E，连接 DE，AE，



则 $CE=BE=\sqrt{6}$，$AE=DE=\sqrt{24-6}=3\sqrt{2}$，

过点 A 作 $AF\perp$ 底面 BCD，垂足在 DE 上，且 $DF=2EF$，

所以 $DF=2\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{2}$，故 $AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{24-8}=4$，

点 O 为最大球的球心，连接 DO 并延长，交 AE 于点 M，则 $DM\perp AE$，

设最大球的半径为 R，则 $OF=OM=R$，

因为 $Rt\triangle AOM\backsim Rt\triangle AEF$，所以 $\frac{AO}{AE}=\frac{OM}{EF}$，即 $\frac{4-R}{3\sqrt{2}}=\frac{R}{\sqrt{2}}$，解得 $R=1$，

即 $OM=OF=1$，则 $AO=4-1=3$，故 $\sin\angle EAF=\frac{OM}{AO}=\frac{1}{3}$，

设最小球的球心为 J，中间球的球心为 K，则两球均与直线 AE 相切，设切点分别为 H，G，

连接 HJ，KG，则 HJ，KG 分别为最小球和中间球的半径，长度分别设为 a，b，

则 $AJ=3HJ=3a$，$AK=3GK=3b$，则 $JK=AK-AJ=3b-3a$，

又 $JK=a+b$，所以 $3b-3a=a+b$，解得 $b=2a$，

又 $OK=R+b=AO-AK=3-3b$，故 $4b=3-R=2$，解得 $b=\frac{1}{2}$，

所以 $a=\frac{1}{4}$，模型中九个球的表面积和为 $4\pi R^2+4\pi b^2\times4+4\pi a^2\times4=4\pi+4\pi+\pi=9\pi$．故选：C.

9. ACD 【解析】对于 A，$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin 2\alpha}{2}=\frac{1}{6}$，A 正确；

对于 B，$f(x)$向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得：$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2x$，即 $g(x)=2\sin 2x$，B 错误；

对于 C，$f(x)=\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

则由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得：$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴ $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，C 正确；

对于 D，$f(x)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan 2x$，∵ $y=\tan 2x$ 的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，∴ $f(x)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，D 正确.

故选：ACD.

10. BD 【解析】对于选项 A，若 $AD\perp AC$，又因为 $AA_1\perp$平面 ABC，

但是点 D 不一定在平面 ABC 上，所以 A 不正确；

对于选项 B，因为 $A_1C_1/\!/AC$，所以 $AC/\!/$平面 A_1C_1D，

平面 $A_1C_1D\cap$平面 $ACD=l$，$AC\subset$平面 ACD，所以 $AC/\!/l$，所以 B 正确；

对于选项 C，取$\triangle ABC$ 的中心 O，$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心 O_1，

OO_1 的中点为该三棱柱外接球的球心，所以外接球的半径 $R=\sqrt{1^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{28}{3}\pi$，所以 C 不正确；

对于选项 D，该几何体的外接球即为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球，

OO_1 的中点为该外接球的球心，该球心到平面 ACC_1A_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，

点 D 到平面 ACC_1A_1 的最大距离为 $R-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$，所以 D 正确．故选：BD.

11. BCD 【解析】对于 A，当 $a=b$ 时，函数 $f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

$f(-x)=ae^{-x}+be^{x}=f(x)$，故函数 $f(x)$为偶函数；

当函数 $f(x)$为偶函数时，$f(x)-f(-x)=0$，故$(a-b)e^{x}+(b-a)e^{-x}=0$，

即$(a-b)e^{2x}=(a-b)$，又 $e^{2x}>0$，故 $a=b$.

所以 $a=b$ 是函数 $f(x)$为偶函数的充要条件，故 A 错误；

对于 B，当 $a+b=0$ 时，函数 $f(x)$定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

$f(x)+f(-x)=(a+b)e^{x}+(a+b)e^{-x}=0$，故函数 $f(x)$为奇函数，

当函数 $f(x)$为奇函数时，$f(x)+f(-x)=(a+b)e^{x}+(a+b)e^{-x}=0$，

因为 $e^{x}>0$，$e^{-x}>0$，故 $a+b=0$.

所以 $a+b=0$ 是函数 $f(x)$为奇函数的充要条件，故 B 正确；

对于 C，$f'(x)=ae^{x}-be^{-x}$，因为 $ab<0$，

若 $a>0$，$b<0$，则 $f'(x)=ae^{x}-be^{-x}>0$ 恒成立，则 $f(x)$为单调递增函数，

若 $a<0$，$b>0$ 则 $f'(x)=ae^{x}-be^{-x}<0$ 恒成立，则 $f(x)$为单调递减函数，

故 $ab<0$，函数 $f(x)$为单调函数，故 C 正确；

对于 D，$f'(x)=ae^{x}-be^{-x}=\frac{ae^{2x}-b}{e^{x}}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$，又 $ab>0$，

若 $a>0$，$b>0$，当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增，函数 $f(x)$存在唯一的极小值.

若 $a<0,b<0$，当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减．故函数 $f(x)$ 存在唯一的极大值．

所以函数存在极值点，故 D 正确．故选：BCD．

12．AC 【解析】由 $(a_{2022}-1)\cdot(a_{2023}-1)<0$ 可得 $a_{2022}-1$ 和 $a_{2023}-1$ 异号，即 $\begin{cases}a_{2022}-1>0,\\a_{2023}-1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_{2022}-1<0,\\a_{2023}-1>0.\end{cases}$

而 $a_1>1,a_{2022}\cdot a_{2023}>1$，可得 a_{2022} 和 a_{2023} 同号，且一个大于 1，一个小于 1．

因为 $a_1>1$，所以 $a_{2022}>1,0<a_{2023}<1$，即数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项大于 1，而从第 2023 项开始都小于 1．

对于 A：公比 $q=\frac{a_{2023}}{a_{2022}}<1$，因为 $a_1>1$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}$ 为减函数，所以等比数列 $\{a_n\}$ 为递减数列．故 A 正确；

对于 B：因为 $a_{2023}<1$，所以 $a_{2023}=S_{2023}-S_{2022}<1$，所以 $S_{2022}+1>S_{2023}$．故 B 错误；

对于 C：等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，且数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项大于 1，而从第 2023 项开始都小于 1，所以 T_{2022} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项．故 C 正确；

对于 D：$T_{4045}=a_1a_2a_3\cdots a_{4045}=a_1(a_1q)(a_1q^2)\cdots(a_1q^{4044})=a_1^{4045}q^{1+2+3+\cdots+4044}=a_1^{4045}q^{2022\times4045}=(a_1q^{2022})^{4045}=a_{2023}^{4045}$，因为 $a_{2023}<1$，所以 $a_{2023}^{4045}<1$，即 $T_{4045}<1$．故 D 错误．故选：AC．

三、填空题

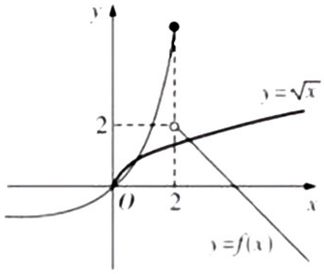
13．$2\sqrt{5}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(-2,\lambda),\boldsymbol{b}=(3,1)$，可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\lambda+1)$．

又因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，可得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=(1,\lambda+1)\cdot(3,1)=3+\lambda+1=0$，解得 $\lambda=-4$．

所以 $\boldsymbol{a}=(-2,-4)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$．

14．3 【解析】令 $g(x)=0$ 得 $f(x)=\sqrt{x}$．

在同一直角坐标系中作出 $f(x)$（图中细实线所示），$y=\sqrt{x}$（图中粗实线所示）的大致图象如下：



由图象可知，函数 $y=f(x)$ 与 $y=\sqrt{x}$ 的图象有 3 个交点，即函数 $g(x)$ 有 3 个零点．

15．$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 【解析】根据相互平行的直线与平面所成的角是相等的，所以在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 AB_1D_1 与直线 AA_1,A_1B_1,A_1D_1 所成的角是相等的，所以平面 AB_1D_1 与正方体的每条棱所在的直线所成角都是相等的，同理平面 C_1BD 也满足与正方体的每条棱所在的直线所成角都是相等，要求截面面积最大，则截面的位置为距平面 AB_1D_1 与平面 C_1BD 相等距离的中间位置，且过棱的中点的正六边形，边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以其面积为 $S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

16．914 【解析】由条件可得 $\sum\limits_{n=0}^{20}y_ny'_n=\sum\limits_{n=0}^{20}(n+1)1.1^n=1\times1.1^0+2\times1.1^1+\cdots+20\times1.1^{19}+21\times1.1^{20}$ ①，

所以 $1.1\times\sum\limits_{n=0}^{20}y_ny'_n=1\times1.1^1+2\times1.1^2+\cdots+20\times1.1^{20}+21\times1.1^{21}$ ②，

① − ② 得：$-0.1\times\sum\limits_{n=0}^{20}y_ny'_n=1.1^0+1.1^1+\cdots+1.1^{20}-21\times1.1^{21}=\frac{1-1.1^{21}}{1-1.1}-21\times1.1^{21}$

$=\frac{1-1.1^{21}+0.1\times21\times1.1^{21}}{-0.1}=\frac{1+1.1^{22}}{-0.1}=\frac{1+8.14}{-0.1}=-91.4$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{20}y_ny'_n=914$．

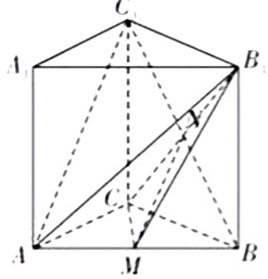
四、解答题

17．【解析】(1) 连接 BC_1 交 B_1C 于点 N，连接 MN，则点 N 为 BC_1 的中点．

因为 M 为 AB 的中点，所以 $AC_1/\!/MN$． …………………………………… 2 分

又 $AC_1\not\subset$ 平面 B_1CM，$MN\subset$ 平面 B_1CM，所以 $AC_1/\!/$ 平面 B_1CM． …………………… 4 分

(2)连接 AB_1，因为 $CA=CB=2$，所以 $CM\perp AB$。



又因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$CM\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp CM$，$AB\cap AA_1=A$，所以 $CM\perp$ 平面 ABB_1A_1。

又因为 $MB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $CM\perp MB_1$。 ………………………………………… 6 分

又 $CA^2+CB^2=AB^2$，所以△ABC 是等腰直角三角形，

$CM=\dfrac{1}{2}AB=\sqrt{2}$，$MB_1=\sqrt{MB^2+BB_1^2}=\sqrt{11}$，所以 $S_{\triangle CMB_1}=\dfrac{1}{2}CM\cdot MB_1=\dfrac{\sqrt{22}}{2}$，

$S_{\triangle ACM}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ACB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}CA\cdot CB=1$。 ………………………………………………………… 8 分

设点 A 到平面 B_1CM 的距离为 d。

因为 $V_{A\text{-}B_1CM}=V_{B_1\text{-}ACM}$，

所以$\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle B_1CM}\times d=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ACM}\times AA_1$，所以 $d=\dfrac{S_{\triangle ACM}\times AA_1}{S_{\triangle B_1CM}}=\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$。 ………………………… 10 分

18.【解析】(1)由题知$\dfrac{\sin(A-B)}{\cos B}=\dfrac{\sin(A-C)}{\cos C}$，

所以 $\sin(A-B)\cos C=\sin(A-C)\cos B$，

所以 $\sin A\cos B\cos C-\cos A\sin B\cos C=\sin A\cos C\cos B-\cos A\sin C\cos B$，

所以 $\cos A\sin B\cos C=\cos A\sin C\cos B$，

因为 A 为锐角，即 $\cos A\neq 0$，所以 $\sin B\cos C=\sin C\cos B$，

所以 $\tan B=\tan C$，所以 $B=C$。 ………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知：$B=C$，所以 $\sin B=\sin C$，因为 $a\sin C=1$，

所以$\dfrac{1}{a}=\sin C$，因为由正弦定理得：$a=2R\sin A$，$\sin C=\sin B=\dfrac{b}{2R}$，

所以 $a\sin C=2R\sin A\cdot\dfrac{b}{2R}=b\sin A=1$，所以$\dfrac{1}{b}=\sin A$。 ………………………………………… 8 分

因为 $A=\pi-B-C=\pi-2C$，所以$\dfrac{1}{b}=\sin A=\sin 2C$，

所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\sin^2C+\sin^2 2C=\dfrac{1-\cos 2C}{2}+(1-\cos^2 2C)=-\cos^2 2C-\dfrac{1}{2}\cos 2C+\dfrac{3}{2}$。 ………………… 10 分

因为△ABC 是锐角三角形，且 $B=C$，所以$\dfrac{\pi}{4}<C<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{2}<2C<\pi$，所以 $-1<\cos 2C<0$，

当 $\cos 2C=-\dfrac{1}{4}$ 时，$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 取最大值为$\dfrac{25}{16}$，所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$ 的最大值为$\dfrac{25}{16}$。 ………………………… 12 分

19.【解析】(1)记一轮踢球，甲进球为事件 A，乙进球为事件 B，A，B 相互独立，

由题意得：$P(A)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$。 ………………………………… 2 分

甲的得分 X 的可能取值为 -1，0，1，

$P(X=-1)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=0)=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})=P(A)P(B)+P(\bar{A})P(\bar{B})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{12}$，

$P(X=1)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，

所以 X 的分布列为：

X	-1	0	1
p	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{1}{4}$

$E(X)=-1\times\dfrac{1}{6}+0\times\dfrac{7}{12}+1\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$。 ………………………………………………………… 6 分

(2)经过三轮踢球，甲累计得分高于乙有四种情况：甲 3 轮各得 1 分；甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得 0 分；甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得 -1 分；甲 3 轮中有 1 轮得 1 分，2 轮各得 0 分，

甲 3 轮各得 1 分的概率为 $P_1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$，

甲 3 轮中有 2 轮各得 1 分，1 轮得 0 分的概率为 $P_2=C_3^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{7}{64}$，

甲3轮中有2轮各得1分，1轮得-1分的概率为 $P_3=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{32}$，

甲3轮中有1轮得1分，2轮各得0分的概率为 $P_4=C_3^1\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{49}{192}$.

所以经过三轮踢球，甲累计得分高于乙的概率 $P=\frac{1}{64}+\frac{7}{64}+\frac{1}{32}+\frac{49}{192}=\frac{79}{192}$. …………………………… 12分

20.【解析】(1)∵$a_{n+1}=2a_n+n$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+n+1$，两式相减，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+1$，

∴$a_{n+2}-a_{n+1}+1=2(a_{n+1}-a_n+1)$，即 $b_{n+1}=2b_n$，

又∵$a_2=1$，$b_1=2\neq0$，∴数列$\{b_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列. ………………………………… 5分

(2)由(1)可知，$b_n=2^n$，即 $a_{n+1}-a_n=2^n-1$，

$a_2-a_1=2-1$，

$a_3-a_2=2^2-1$，

……

$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}-1(n\geq2)$，

∴$a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}-(n-1)=2^n-n-1$，

∴$n\geq2$，$a_n=2^n-n-1$，

当$n=1$时，$a_1=0$也满足上式，∴$a_n=2^n-n-1$. ……………………………………………… 8分

∴$c_n=\frac{a_n}{3^n}=\frac{2^n-n-1}{3^n}$，∴$c_{n+1}=\frac{2^{n+1}-n-2}{3^{n+1}}$，

∴$c_{n+1}-c_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{3^{n+1}}-\frac{2^n-n-1}{3^n}=\frac{2n+1-2^n}{3^{n+1}}$. ……………………………………………… 10分

令 $f(n)=2n+1-2^n$，则 $f(n+1)=2n+3-2^{n+1}$，∴$f(n+1)-f(n)=2-2^n$，

∴$f(1)=f(2)$，$f(2)>f(3)>f(4)>\cdots>f(n)$，

∵$f(1)=f(2)=1>0$，$f(3)=-1<0$，∴$n\geq3$，$f(n)<0$，

∴$c_1<c_2<c_3$，$c_3>c_4>c_5>\cdots>c_n$，

∴$n=3$，c_n最大，即$n=3$. ……………………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)法一：由$\begin{cases}a^2+b^2=25,\\ \frac{64}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1,\end{cases}$解得 $a^2=16$，$b^2=9$，∴双曲线E的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

法二：设左、右焦点分别为 $F_1(-5,0)$，$F_2(5,0)$，∴$c=5$，$2a=||MF_1|-|MF_2||=\sqrt{196}-\sqrt{36}=8$，

∴$a=4$，$b^2=c^2-a^2=9$，

∴双曲线E的标准方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. ……………………………………………………… 4分

(2)法一：直线CD不可能水平，故设CD的方程为 $x=my+t$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$消去$x$得$(9m^2-16)y^2+18mty+9t^2-144=0$，$(9m^2-16\neq0)$，

∴$y_1+y_2=\frac{-18mt}{9m^2-16}$，$y_1y_2=\frac{9t^2-144}{9m^2-16}$，$y_1-y_2=\pm\frac{24\sqrt{t^2+9m^2-16}}{9m^2-16}$，

AC的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+4}(x+4)$，令$x=2$，得 $y_P=\frac{6y_1}{x_1+4}$，

BD的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-4}(x-4)$，令$x=2$，得 $y_P=\frac{-2y_2}{x_2-4}$，

∴$\frac{6y_1}{x_1+4}=\frac{-2y_2}{x_2-4}$，即 $3x_2y_1-12y_1+x_1y_2+4y_2=0$. ……………………………………… 8分

∴$3(my_2+t)y_1-12y_1+(my_1+t)y_2+4y_2=0$，

$4my_1y_2+(3t-12)y_1+(t+4)y_2=0$，

$4my_1y_2+(2t-4)(y_1+y_2)+(t-8)(y_1-y_2)=0$，

$\frac{4m(9t^2-144)}{9m^2-16}-\frac{(2t-4)18mt}{9m^2-16}\pm\frac{24(t-8)\sqrt{t^2+9m^2-16}}{9m^2-16}=0$，

$3m(t-8)\pm(t-8)\sqrt{t^2+9m^2-16}=0$，

$(t-8)(3m\pm\sqrt{t^2+9m^2-16})=0$，

解得 $t=8$ 或 $\sqrt{t^2+9m^2-16}=\pm3m$，即 $t=8$ 或 $t=4$(舍去)或 $t=-4$(舍去)，

∴直线CD的方程为 $x=my+8$，∴直线CD过定点，定点坐标为$(8,0)$. ……………………………… 12分

法二：直线 CD 不可能水平，设 CD 的方程为 $x=my+t$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$P(2,n)$，

联立$\begin{cases}x=my+t,\\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1,\end{cases}$消去 x 得 $(9m^2-16)y^2+18mty+9t^2-144=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-18mt}{9m^2-16}$，$y_1y_2=\dfrac{9t^2-144}{9m^2-16}$，

直线 AC 的方程为 $y=\dfrac{n}{6}(x+4)$，直线 BD 的方程为 $y=\dfrac{n}{-2}(x-4)$，

$\because$点 C，D 分别在直线 AC，BD 上，$\therefore y_1=\dfrac{n}{6}(x_1+4)$，$y_2=\dfrac{n}{-2}(x_2-4)$，

两式相除消去 n 得 $\dfrac{6y_1}{x_1+4}=\dfrac{-2y_2}{x_2-4}$，即 $x_1+4=\dfrac{-3(x_2-4)y_1}{y_2}$， ………………………………………………… 8 分

又 $\dfrac{x_1^2}{16}-\dfrac{y_1^2}{9}=1$，$\therefore 9(x_1+4)(x_1-4)=16y_1^2$，

将 $x_1+4=\dfrac{-3(x_2-4)y_1}{y_2}$ 代入上式，得 $-27(x_1-4)(x_2-4)=16y_1y_2$，

$-27(my_1+t-4)(my_2+t-4)=16y_1y_2$，

$(27m^2+16)y_1y_2+27(t-4)m(y_1+y_2)+27(t-4)^2=0$，

$(27m^2+16)\dfrac{9t^2-144}{9m^2-16}+27(t-4)m\dfrac{-18mt}{9m^2-16}+27(t-4)^2=0$，

整理得 $t^2-12t+32=0$，解得 $t=8$ 或 $t=4$（舍去）．

$\therefore$直线 CD 的方程为 $x=my+8$，$\therefore$直线 CD 过定点，定点坐标为 $(8,0)$． …………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f'(x)=-\sin x+x$，令 $s(x)=-\sin x+x$，

则 $s'(x)=-\cos x+1\geq 0$（不恒为零），故 $s(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

故 $s(x)\geq s(0)=0$，所以 $f'(x)\geq 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(0)=0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上无最大值． …………………………… 4 分

(2) 先证明不等式：$\sin x\geq x-\dfrac{x^3}{6}(x\geq 0)$．

证明：设 $u(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$，$x\geq 0$，

则 $u'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}=f(x)\geq 0$（不恒为零），故 $u(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

故 $u(x)\geq u(0)=0$，即 $\sin x\geq x-\dfrac{x^3}{6}(x\geq 0)$ 恒成立．

当 $i\in\mathbf{N}^*$ 时，$k_i=\dfrac{g\left(\dfrac{1}{2^{i+1}}\right)-g\left(\dfrac{1}{2^i}\right)}{\dfrac{1}{2^{i+1}}-\dfrac{1}{2^i}}=2^{i+1}\left(\sin\dfrac{1}{2^i}-\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\right)$

$=2^{i+1}\left(2\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}-\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\right)=2^{i+1}\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\times\left(2\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}-1\right)$， ……………………………………… 8 分

由(1)可得 $\cos x\geq 1-\dfrac{x^2}{2}(x\geq 0)$，故 $\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}\geq 1-\dfrac{1}{2^{2i+3}}>0$，

故 $2^{i+1}\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\times\left(2\cos\dfrac{1}{2^{i+1}}-1\right)\geq 2^{i+1}\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\times\left[2\left(1-\dfrac{1}{2^{2i+3}}\right)-1\right]$

$=2^{i+1}\sin\dfrac{1}{2^{i+1}}\times\left(1-\dfrac{1}{2^{2i+2}}\right)\geq 2^{i+1}\left(\dfrac{1}{2^{i+1}}-\dfrac{1}{6\times 2^{3i+3}}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{2i+2}}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{6\times 2^{2i+2}}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^{2i+2}}\right)=1-\dfrac{7}{6}\times\dfrac{1}{2^{2i+2}}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2^{4i+4}}>1-\dfrac{7}{6}\times\dfrac{1}{2^{2i+2}}$， ……………………… 10 分

故 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}>n-1-\dfrac{7}{6}\left(\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^6}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$

$=n-1-\dfrac{7}{6}\times\dfrac{\dfrac{1}{2^4}\left(1-\dfrac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\dfrac{1}{4}}=n-1-\dfrac{7}{6}\times\left(\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4^n}\right)$

$=n-1-\dfrac{7}{72}+\dfrac{7}{18}\times\dfrac{1}{4^n}>n-\dfrac{79}{72}>n-\dfrac{7}{6}$． ……………………………………………………… 12 分