高三数学参考答案

一、单项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	C	B	A	B	D	A

1．A　由题可得$A\subseteq B$，再利用集合的包含关系即求．

由题知$A\cap(C_R B)=\varnothing$，得$A\subseteq B$，则$m\le 1$，故选：A．

2．C　$\because z(1+\sqrt{3}i)=2i$，$\therefore z=\dfrac{2i}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{2i(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，

所以复平面内z对应的点的坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，故选：C

3．C　$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影是$|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{10}$，故C正确

4．B　因为，$4^a=3^b=36$，所以$a=\log_4 36, b=\log_3 36$，

则$\dfrac{1}{a}=\log_{36}4,\dfrac{2}{b}=\log_{36}9$，所以则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\log_{36}36=1$，故选：B．

5．A　当$2<x_1<x_2$时，$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)>0$恒成立，所以$f(x)$在$(2,+\infty)$为增函数．

又因为$f(x+2)$是偶函数，所以，$f(-x+2)=f(x+2)$

即$a=f(\frac{1}{2})=f(\frac{7}{2})$，所以$f(3)<f(\frac{7}{2})<f(4)$，即$b<a<c$．故选：A

6．B　因为$a_1+a_2+\cdots+a_n=2^n-1$①，所以$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2^{n-1}-1(n\ge 2)$②，

①-②得$a_n=2^{n-1}(n\ge 2)$，当$n=1$时$a_1=2^1-1=1$，满足上式．

所以$a_n=2^{n-1}(n\ge 1)$，$\therefore a_n^2=2^{2n-2}=4^{n-1}$，$\therefore$数列$\{a_n^2\}$是以1为首项，4为公比的等比数列，

$\therefore a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\dfrac{1-4^n}{1-4}=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$，故选：B．

7．D　令$g(x)=(e^x+1)f(x)$，则$g'(x)=e^x f(x)+(e^x+1)f'(x)>0$，

所以$g(x)$在R上单调递增，不等式$f(x)>\dfrac{e+1}{2(e^x+1)}$可化为$(e^x+1)f(x)>\dfrac{e+1}{2}$，

而$f(1)=\dfrac{1}{2}$，则$g(1)=(e+1)f(1)=\dfrac{e+1}{2}$，即$g(x)>g(1)$，

所以$x>1$，即不等式解集为$(1,+\infty)$．故选：D．

8. 设$\angle BCD=\alpha$,由图可知$\tan\alpha=\frac{2}{x}, \tan(\alpha+\theta)=\frac{5}{x}$

$$\tan\theta=\tan[(\alpha+\theta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\theta)-\tan\theta}{1+\tan(\alpha+\theta)\tan\theta}=\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=\frac{3}{x+\frac{10}{x}}$$

由基本不等式知，当$x=\frac{10}{x}$，即$x=\sqrt{10}$时，$\tan\theta$最大，从而角θ最大；　故选A

二、多项选择题

9	10	11	12
CD	BD	ACD	BCD

9. 选择 CD

对于 A，平面α，β可能相交，A 错误.

对于 B，平面α，β可能平行或斜交.B 错误。

对于 C，因为$l\subset\alpha$且$l\perp\beta$，则必有$\alpha\perp\beta$　，C 正确.

对于 D，因为$\alpha // \beta$，则必有$l // \beta$.D 正确

10.选择 BD

对于 A,当$c=0$时，充分性不成立，故错误。

对于 B，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$知，$\sin A>\sin B$推出 a>b,大边对大角故$A>B$，反之亦然成立，B 正确。

对于 C，等比数列不能有 0 项，故 C 错误.

对于 D,若$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}=\vec{0}$时，$\vec{a}//\vec{b}$成立，但是不存在一个实数λ，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，故充分性不成立。存在一个实数λ，使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，则$\vec{a}//\vec{b}$，必要性成立，故 D 正确。

11.选择 ACD

对于 A ，$f(x+\pi)\neq f(x)$，错误

对于 B,$f(\frac{\pi}{2}+x)=f(\frac{\pi}{2}-x)$,正确

对于 C，令 $\sin x=t$，$f(t)=t-2t^3, t\in[-1,1]$，$f'(t)=1-6t^2=0$ 时，$t_1=-\frac{\sqrt{6}}{6}, t_2=\frac{\sqrt{6}}{6}$

所以 $f(t)$ 在 $\left[-1,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{\sqrt{6}}{6},1\right]$ 递减，在 $(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})$ 递增。当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

而 $\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{6}}{6}$，故当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$f(x)$ 有增有减，错误。

对于 D，$f(t)$ 在 $\left[-1,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{\sqrt{6}}{6},1\right]$ 递减，在 $(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6})$ 递增，$f(-1)=1>\frac{\sqrt{6}}{9}$，错误。

12 题选 BCD，解析：

对于 A，因为 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}=0$，存在 x_0 使得 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，故 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，

在区间 $(x_0,+\infty)$ 递增，$h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=e^{x_0}-\ln\frac{x_0}{2}-\frac{1}{2}+m$，当 $m>\ln\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2}-e^{x_0}$

时，$h(x)$ 不存在零点，A 错误。

对于 B，不等式化为 $e^{ax}-ax\ge x-\ln x=e^{\ln x}-\ln x$，又因为函数 $h(x)=e^x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上

递增，故同构可得：$ax\ge\ln x$，即 $a\ge\frac{\ln x}{x}$ 的最大值，故 $a\ge\frac{1}{e}$ 成立，B 正确。

对于 C，可知 $A(\ln m,m)$，$B(2e^{m-\frac{1}{2}},m)$，$|AB|=2e^{m-\frac{1}{2}}-\ln m$，令 $\varphi(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}-\ln x$

$\varphi'(x)=2e^{x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且 $\varphi'(\frac{1}{2})=0$，当 $x\in(0,\frac{1}{2})$，$\varphi'(x)<0$，

当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$，$\varphi'(x)>0$，所以，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(\frac{1}{2})=2+\ln 2$，C 正确

对于 D，假设存在 $y=m$ 满足题意，可知 $A(\ln m,m)$，$B(2e^{m-\frac{1}{2}},m)$，$f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}$

$f'(\ln m)=e^{\ln m}=m$，$g'(2e^{m-\frac{1}{2}})=\frac{1}{2e^{m-\frac{1}{2}}}$，因为在 $f(x)$ 在 A 处与 $g(x)$ 在 B 处的切线平行

所以有，$m=\frac{1}{2e^{m-\frac{1}{2}}}$，即 $2me^{m-\frac{1}{2}}=1$，得 $m=\frac{1}{2}$，故存在 m 符合题意，D 正确

三、填空题

13、$3+2\sqrt{2}$

14、$y=-ex+e$（或 $ex+y-e=0$）

15、$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$（或$\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$）

16、(1) 46；(2) $a_n=\begin{cases}3\times 2^{\frac{n-1}{2}}-2, n为奇数\\ 3\times 2^{\frac{n-2}{2}}-1, n为偶数\end{cases}$

【解析】

13 题分析，由题可知 $x+y=(x+y)(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})=3+\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\geq 3+2\sqrt{2}$

14 题分析，$f'(x)=-e^{1-x}$，$f'(0)=-e$，又 $f(0)=e$，所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-e=-e(x-0)$，化简得 $y=-ex+e$

15 题分析，ΔABC 中，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，可知其外接圆半径为 1，

又因为球半径为 2，可知球心到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，所以球面上的任意一点 P 到平面 ABC 距离的最大值为 $2+\sqrt{3}$，此时四棱锥 $P-ABC$ 的体积最大，

$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2+\sqrt{3})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

16. 分析

根据数列的规律得到其递推关系为 $a_n=\begin{cases}a_{n-1}+1, n=2k\\ 2a_{n-1}, n=2k+1\end{cases}$，

$\because a_{2k}=a_{2k-1}+1$，$\therefore a_{2k+1}=2a_{2k}=2a_{2k-1}+2$

得到 $a_{2k+1}+2=2(a_{2k-1}+2)$，所以 $a_{2k-1}=3\times 2^{k-1}-2$，从而 $a_{2k}=3\times 2^{k-1}-1$

故，$a_n=\begin{cases}3\times 2^{\frac{n-1}{2}}-2, n为奇数\\ 3\times 2^{\frac{n-2}{2}}-1, n为偶数\end{cases}$

四、解答题

17、解：$f(x)=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+2\cos^2 x$

$=\sin 2x+\cos 2x+2$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2$……………………………………3 分

当$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

即$-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$

$\therefore f(x)$的单调递增区间为$\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$.………………5 分

当$\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})=1$时，$f(x)_{\max}=2+\sqrt{2}$ ……7 分

此时 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$ ……9 分

所以$x\in\left\{x\middle|x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z\right\}$时，$f(x)$取最大值$2+\sqrt{2}$ ……10 分

18、(1) $\because a_{n+1}=2a_n+1$，$\therefore a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

由等比数列的定义可知，$\{a_n+1\}$是公比为 2 的等比数列……………（3 分）

因为首项$a_1+1=2$，公比为 2，所以$a_n+1=2^n$

所以$a_n=2^n-1$ ………………………………………………………………（6 分）

（2）令$10<2^n-1<2021$，因为$n\in N_+$，所以n可取 4，5，6，7，8，9，10 ……（9）

所以，各项的和$S=a_4+a_5+\cdots+a_9+a_{10}$

$=(2^4-1)+(2^5-1)+\cdots+(2^{10}-1)$

$=2025$…………………………………………………………（12 分）

19、（1）$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{ax-1}{x^2}$，$a>0$......1 分

由 $f'(x)>0$, 得 $x>\dfrac{1}{a}$, $f'(x)<0$, 得 $0<x<\dfrac{1}{a}$......2 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$......3 分

当 $x=\dfrac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(x)=f(\dfrac{1}{a})=a\ln\dfrac{1}{a}+a=a-a\ln a$，无极大值......5 分

(2)由函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间为 $(0,\dfrac{1}{a})$ 知，分类讨论得：

1° 当 $0<\dfrac{1}{a}<1$, 即 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[1,\ e]$ 上为增函数，故函数 $f(x)$ 的最小值为

$f(1)=1$，显然 $1\neq\dfrac{2}{e}$，故不满足条件；......7 分

2° 当 $1\le\dfrac{1}{a}\le e$，即 $\dfrac{1}{e}\le a\le 1$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left[1,\dfrac{1}{a}\right]$ 上为减函数，在 $\left(\dfrac{1}{a},e\right]$ 上为增函数，

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(\dfrac{1}{a})=a\ln\dfrac{1}{a}+a=a-a\ln a$，

令 $g(a)=a-a\ln a, a\in\left[\dfrac{1}{e},1\right]$，其导函数 $g'(a)=-\ln a>0$，可知 $g(a)$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},1\right]$ 单调递增

因为 $f(x)_{\min}=\dfrac{2}{e}$，有 $a-a\ln a=\dfrac{2}{e}$，可得 $a=\dfrac{1}{e}$ 符合题意 ………………………… 10 分

3° 当 $\dfrac{1}{a}>e$，即 $0<a<\dfrac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[1,\ e]$ 上为减函数，故函数 $f(x)$ 的最小值为

$f(e)=a\ln e+\dfrac{1}{e}=a+\dfrac{1}{e}$，由 $a+\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e}$，得 $a=\dfrac{1}{e}$ 不满足条件

综上所述：存在这样的 $a=\dfrac{1}{e}$ 符合题意......12 分.

20、（1）$\because b_{n+1}-b_n=1, b_n=\log_3 a_{n+1}$，可知 $q=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3$ ……………………（2 分）

又因为 $a_1+a_2=4$，得 $a_1=1$

故，$a_n=3^{n-1}$，$b_n=n$ ……………………………………（4）

（2）当 n 为奇数时，$C_n=\dfrac{(2-8n)3^{n-1}}{n(n+2)}=\dfrac{3^{n-1}}{n}-\dfrac{3^{n+1}}{n+2}$ ……………………（6 分）

前 $2n$ 项中所有的奇数项的和为：

$S_{奇}=\dfrac{3^0}{1}-\dfrac{3^2}{3}+\dfrac{3^2}{3}-\dfrac{3^4}{5}+\cdots+\dfrac{3^{2n-2}}{2n-1}-\dfrac{3^{2n}}{2n+1}=1-\dfrac{3^{2n}}{2n+1}=1-\dfrac{9^n}{2n+1}$（7 分）

当 n 为偶数时，$C_n=n\cdot 3^{n-1}$

记 $S_{偶}=2\times3+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2n\cdot3^{2n-1}$

$3S_{偶}=2\times3^2+4\times3^3+\cdots+2(n-1)\cdot3^{2n-1}+2n\cdot3^{2n}$

两式相减，化简得

$S_{偶}=\dfrac{24n-3}{32}\times9^n+\dfrac{3}{32}$ ……………………………………（11 分）

故，前 $2n$ 项和 $S_{2n}=S_{奇}+S_{偶}=9^n(\dfrac{24n-3}{32}-\dfrac{1}{2n+1})+\dfrac{35}{32}$ ……………（12 分）

21、(1) $\because \tan\theta=\frac{1}{3}, \therefore \cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ......1 分

在三角形 ABC 中，$\cos\theta=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$

即解出 $BC^2=90$，$BC=3\sqrt{10}$ 海里......3 分

$\therefore v=\frac{3\sqrt{10}}{\frac{1}{3}}=9\sqrt{10}$ 海里/小时...... 4 分

(2) 易知 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ......5 分

$\sin\angle AFC=\sin(45^\circ-B)=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ....6 分

在三角形 ABF 中，$\frac{AF}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle AFC}$，求得 $AF=30$ 海里......7 分

$\therefore EF=AF-AE=10$ 海里......8 分

过 E 作 EG 垂直于 BF 交于 G，$\sin\angle EFG=\frac{EG}{EF}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，EG= $\sqrt{10}<5$ ......10 分

∴小岛受台风影响。

小岛受台风影响时间记作 t 小时，t=$\frac{2\sqrt{25-10}}{9\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{6}}{9}>\frac{1}{4}$ ....11 分

所以小岛受台风影响时间超过 15 分钟。......12 分。

22、（1）当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$，$f(x)<0$，无零点......1 分

当 $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ ，$f'(x)=\cos x-x\sin x$，因为当 $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，$\tan x>\frac{1}{x}$

所以 $f'(x)=\cos x-x\sin x<0$，则 $f(x)$ 在 $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$ 上为减函数

$f(-\pi)=\pi-\frac{3}{2}>0, f(-\frac{\pi}{2})=-\frac{3}{2}<0$，$f(x)$ 在此区间有一个零点.

故 $f(x)$ 在 $(-\pi,0)$ 有一个零点......4 分

（2）由 $g(x)\geq f(x)$ 得：分离的 $a\leq\frac{2\sin x-x\cos x}{x}$

令 $h(x)=\frac{2\sin x-x\cos x}{x}$，$x\in(0,\pi)$，$h'(x)=\frac{2x\cos x-2\sin x+x^2\sin x}{x^2}$ ......5 分

令 $m(x)=2x\cos x-2\sin x+x^2\sin x$，则 $m'(x)=x^2\cos x$

在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$，$m'(x)=x^2\cos x>0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 递增. $m(x)>m(0)=1$

$h'(x)>0, h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 递增......6 分

在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$m'(x)=x^2\cos x\leq 0$，所以 $m(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 递减.

又因为 $m(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2>0, m(\pi)=-2\pi$，故在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上存在一个 x_0 使得 $m(x_0)=0$

即 $m(x_0)=2x_0\cos x_0-2\sin x_0+{x_0}^2\sin x_0=0$， ......8 分

同时除以 x_0 得：$2\cos x_0+x_0\sin x_0=2\frac{\sin x_0}{x_0}$ ....9 分

所以 $m(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$ 大于零，在区间 (x_0,π) 上小于零.

故 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$ 递增，在区间 (x_0,π) 上递减.

所以 $h(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 递增，在区间 (x_0,π) 上递减.

$h(x)_{\max}=h(x_0)=\frac{2\sin x_0}{x_0}-\cos x_0=\cos x_0+x_0\sin x_0$，$x_0\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ ......10 分

对于函数 $\varphi(x)=\cos x+x\sin x$，$x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，$\varphi'(x)=x\cos x<0$

所以 $\varphi(x)=\cos x+x\sin x$ 在 $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 递减，$\varphi(x)<\varphi(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}$ ......11 分

故 $h(x)_{\max}<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $a<\dfrac{\pi}{2}$ 成立......12 分