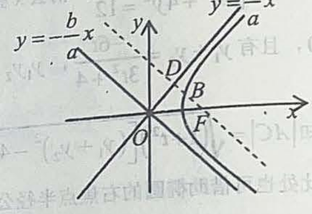
树德中学高2020级高三下期2月开学考试数学试题（文科）参考答案

一、选择题： CBCAC　CCDBB　CB

二、填空题：13．$\ln 2$　14．4　15．5　16．（1）$\sqrt{21}$　（2）9π

——部分选填题参考解答——



10．如图，由题意可知ΔODF为等腰三角形，$OD=DF$，

则$x_D=\frac{c}{2}$，代入渐近线方程$y=\frac{b}{a}x$，得$y_D=\frac{bc}{2a}$，

又$F(c,0)$，可得中点$B\left(\frac{3c}{4},\frac{bc}{4a}\right)$，将其代入双曲线方程，

可得$\frac{9c^2}{16a^2}-\frac{c^2}{16a^2}=1$，整理可得$e^2=2$，$\therefore e=\sqrt{2}$．

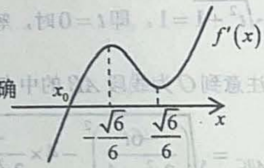
11．联系函数不等式$e^x\geq x+1$（当且仅当$x=0$时取等）和$\ln x\leq x-1$（当且仅当$x=1$时取等），

可得：（1）$b=e^{-\frac{3}{5}}>-\frac{3}{5}+1=\frac{2}{5}=a$；（2）$c=\ln 5-\ln 4=\ln\frac{5}{4}<\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}<\frac{2}{5}=a$．

从而有$b>a>c$．

12．$f(x)=x^4-x^2+x-1$，$f'(x)=4x^3-2x+1$，$f''(x)=12x^2-2=12\left(x+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，

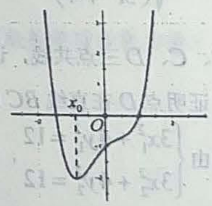
（1）$f'(x)$在$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$↗，在$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$↘，在$\left(\frac{\sqrt{6}}{6},+\infty\right)$↗，



则$f'(x)$大致图象如右所示，可知方程$f'(x)=k$可能有三个根，故①正确

（2）计算得$f'\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)>0$，则存在$x_0\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，使得$f'(x_0)=0$，

从而可知$f(x)$在$(-\infty,x_0)$↘，$(x_0,+\infty)$↗，故②正确



（3）计算得$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)<0$，则$f(x_0)<0$，$f(x)$大致图象如右，故③正确

（4）设过原点O的直线$y=kx$与$y=f(x)$相切于点(x_0,y_0)，则有

$y_0=x_0^4-x_0^2+x_0-1$，$k=f'(x_0)=4x_0^3-2x_0+1$，$y_0=kx_0$，

消元整理可得$3x_0^4-x_0^2+1=0$，易知此方程无解，故④错误．综上，正确的是①②③．

（说明：由$f(x)=x^4-x^2+x-1=(x-1)(x^3+x^2+1)$，也可以分析$f(x)$的零点个数）

15．**（请同学们结合此题的学习与研究，进一步丰富对抛物线焦点弦的典型性质的认识与积累！）**

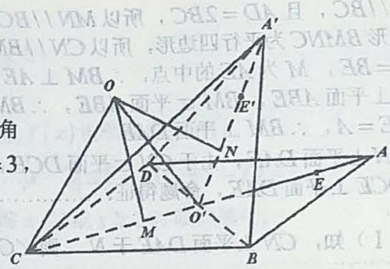
【解法简介】过F作AB的垂线，交准线于M，连接MA，由$AA'=AF$，易证MA平分$\angle A'AF$，则知M即已知中的点P．连接PB，已知PB平分$\angle B'BF$，可推知$PA'=PF=PB'$，则P恰为$A'B'$的中点，故$PF=PA'=PB'=5$．

【性质积累】（1）可以证明，以焦点弦AB为直径的圆必与准线相切，且切点恰为$A'B'$的中点P；

（2）连接PF，可以证明PF恰好与此焦点弦AB相互垂直；

（3）连接PA、PB，可以证明PA平分$\angle A'AF$，PB平分$\angle B'BF$．（图略）

16. (1) 由题易知，ΔCBD、$\Delta A'B'D$均为等边三角形，取它们的中心M、N，过M、N分别作平面CBD、平面$A'B'D$的垂线，易知两垂线必交于一点O，且点O正是三棱锥$A'-BCD$的外接球球心.（如图所示）



记$AC\cap BD=O'$，则可知二面角$A'-BD-A$的平面角为$\angle A'OC=120^\circ$，在四边形$MO'NO$中，可求得$ON=3$，则外接球半径$R=\sqrt{ON^2+NA'^2}=\sqrt{21}$；

(2) 当截面面积取最小值时，可知$OE'\perp$截面，易求得$|OE'|=2\sqrt{3}$，则截面圆半径$r=\sqrt{R^2-OE'^2}=3$，故其面积$S=9\pi$.

三、解答题：**全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》**

17. 解：(Ⅰ) 选择①，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d>0$，

由题意可得$S_4^2=S_2S_8$，即有$(4+6d)^2=(2+d)(8+28d)$，解之得$d=2$，

则$a_n=1+2(n-1)=2n-1$. ......6 分

选择②，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$d>0$，

由可$a_5a_{10}-a_7^2=2$，得$(1+4d)(1+9d)-(1+6d)^2=2$，解之得$d=2$，

则$a_n=1+2(n-1)=2n-1$. ......6 分

(Ⅱ) 由(Ⅰ)可得$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

所以$T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$ ......12 分

18. 解：(Ⅰ) 由题意及数据表可得，
"花卉存活"的有 13 株，"花卉死亡"的有 7 株；
"生根足量"的有 15 株，"生根不足量"的有 5 株.
①填写列联表如右：
②应用公式计算得：

$$K^2=\frac{20\times(12\times4-3\times1)^2}{13\times7\times15\times5}\approx5.934<6.635$$

所以不能在犯错误概率不超过 1%的前提下，认为"花卉存活"与"生根足量"有关.

	生根足量	生根不足量	总计
花卉存活	12	1	13
花卉死亡	3	4	7
总计	15	5	20

(Ⅱ) 样本中"生根不足量"的有 5 株，其中"花卉死亡"的有 4 株，记为A,B,C,D；"花卉存活"的有 1 株，记为a. 设事件A：从 5 株中随机抽取 3 株中恰有 1 株存活，

可知其包含的所有情况为：$ABC,ABD,ACD,BCD;ABa,ACa,ADa,BCa,BDa,Ca.$共 10 种

其中恰有 1 株"花卉存活"的情况为$ABa,ACa,ADa,BCa,BDa,CDa.$共 6 种.

故所求事件的概率为$P(A)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. ......12 分

第 3 页共 2 页

19．解：（Ⅰ）如图，取 AE、DE 的中点 M、N，连接 BM、MN、CN，则知 $MN//AD$，且 $AD=2MN$，

又 $AD//BC$，且 $AD=2BC$，所以 $MN//BC$，且 $MN=BC$，

则四边形 $BMNC$ 为平行四边形，所以 $CN//BM$．

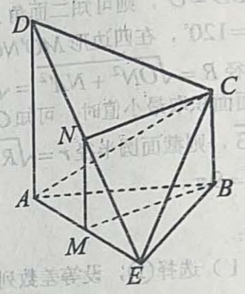
$\because AB=BE$，M 为 AE 的中点，$\therefore BM\perp AE$，

$\because AD\perp$ 平面 ABE，$BM\subset$ 平面 ABE，$\therefore BM\perp AD$，

又 $AD\cap AE=A$，$\therefore BM\perp$ 平面 DAE

从而可得 $CN\perp$ 平面 DAE，由于 $CN\subset$ 平面 DCE，

所以平面 $DCE\perp$ 平面 DAE，命题得证．……………………6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$CN\perp$ 平面 DAE 于 N，则 $\angle CEN$ 为 CE 与平面 DAE 所成角．且在 $Rt\Delta CEN$ 中，$\sin\angle CEN=\dfrac{CN}{CE}$，………8 分

由 $AB=BE=1$ 且 $AE=\sqrt{2}$，得 $AB\perp BE$，

又已知 $AD\perp$ 平面 ABE，$BE\subset$ 平面 ABE，$\therefore AD\perp BE$，

$\because AD\cap AB=A$，$\therefore BE\perp$ 平面 $ABCD$

设 $BC=t(t>0)$，则 $AD=2t$，那么有 $S_{ABCD}=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot AB=\dfrac{3t}{2}$，

则 $V_{ABCDE}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot BE=\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{4}$，解得 $t=\dfrac{1}{2}$，即有 $BC=\dfrac{1}{2}$……………………10 分

从而易得，在 $Rt\Delta CBE$ 中，$CE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$；

又在 $Rt\Delta ABE$ 中，$BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则知 $CN=BM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\therefore \sin\angle CEN=\dfrac{CN}{CE}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，即 CE 与平面 DAE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$．……………12 分

20．解：（Ⅰ）$a=1$ 时，由 $f(x)=\sin x-x+\dfrac{1}{6}x^3$，可得 $g(x)=f'(x)=\cos x-1+\dfrac{1}{2}x^2$，

则 $g'(x)=-\sin x+x$，那么有 $g''(x)=-\cos x+1\geq 0$，所以 $g'(x)$ 在定义域 R 上单调递增，

注意到 $g'(0)=0$，从而可得 $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$，$g'(x)\leq 0\Leftrightarrow x\leq 0$，

即知 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)\geq g(0)=0$，即当 $a=1$ 时，$g(x)$ 的最小值为 0．……………………………6 分

（Ⅱ）由 $f(x)=\sin x-ax+\dfrac{1}{6}x^3$，可得 $g(x)=f'(x)=\cos x-a+\dfrac{1}{2}x^2$，

由（Ⅰ），同理可知，$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $g(x)\geq g(0)=1-a$．讨论如下：

（1）当 $a\leq 1$ 时，有 $g(x)\geq g(0)=1-a\geq 0$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

从而有 $f(x)\geq f(0)=0$，符合题意．

（2）当 $a>1$ 时，有 $g(0)=1-a<0$，由于 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $g(2a)=\cos 2a-a+2a^2=\cos 2a+a^2+a(a-1)>0$，所以 $\exists x_0\in(0,2a)$，使得 $g(x_0)=0$，

2023-2　高三数开

从而可知当$x\in(0,x_0)$时，$g(x)<g(x_0)=0$，则则$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

此时有$f(x)<f(0)=0$，不合题意.

综上，a的取值范围为$(-\infty,1]$. ……………………………………………………12 分

21．解：（Ⅰ）由AC经过E椭圆的右焦点$F(1,0)$，设直线AC的方程为$x=ty+1$，

联立方程组$\begin{cases}x=ty+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去$x$整理可得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，

显然$\Delta>0$，且有$y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$. ……………………………………3 分

法一：则知$|AC|=\sqrt{(1+t^2)\left[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right]}=\cdots=\dfrac{12(t^2+1)}{3t^2+4}$，

（说明：此处也可借助椭圆的右焦点半径公式$r=a-ex_0$，得到$|AC|=2a-e(x_1+x_2)$求之）

而原点O到直线AC的距离$d=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$，

由于O为线段AB的中点，则B到直线AC的距离为$2d$，

则$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot 2d=|AC|\cdot d=\dfrac{12\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4}=\dfrac{12}{3\sqrt{t^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}}=\dfrac{12}{3m+\dfrac{1}{m}}$，其中$m=\sqrt{t^2+1}\geq 1$，

由$y=3m+\dfrac{1}{m}$在$[1,+\infty)$上单调递增，故$y=3m+\dfrac{1}{m}\geq 4$，

当$m=\sqrt{t^2+1}=1$，即$t=0$时，等号成立，从而可知，$S_{\Delta ABC}$的最大值为3. …………………8 分

法二：注意到O为线段AB的中点，则$S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AOC}=|OF|\cdot|y_2-y_1|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$，

则有$S_{\Delta ABC}=\sqrt{\left(\dfrac{-6t}{3t^2+4}\right)^2-4\times\dfrac{-9}{3t^2+4}}=\dfrac{12(t^2+1)}{3t^2+4}$，以下同法一. ……………………………8 分

（Ⅱ）B、C、D三点共线，证明如下：

法一：（证明点D在直线BC上，即证点D的坐标适合直线BC的方程）

一方面，由$\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\3x_2^2+4y_2^2=12\end{cases}$，两式相减整理可得$4(y_2^2-y_1^2)=-3(x_2^2-x_1^2)$，

另一方面，$k_{AC}\cdot k_{BC}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$，从而可得$k_{AC}\cdot k_{BC}=-\dfrac{3}{4}$为定值. ……10 分

由$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，得$AC\perp AB$，即有$k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$，又$k_{AC}\cdot k_{BC}=-\dfrac{3}{4}$，

可得$k_{BC}=\dfrac{3}{4}k_{AB}=\dfrac{3y_1}{4x_1}$，从而直线$BC$的方程为$y+y_1=\dfrac{3y_1}{4x_1}(x+x_1)$，

第 4 页共 2 页

令 $x=x_1$，可解得 $y=\frac{3y_1}{4x_1}\cdot(2x_1)-y_1=\frac{y_1}{2}$，

即点 $D\left(x_1,\frac{y_1}{2}\right)$ 在直线 BC 上，故 B、C、D 三点共线. ……………………………………12 分

法二：（通过坐标运算转化，证明 $k_{BC}=k_{BD}$）

由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，得 $AC\perp AB$，即有 $k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$，则 $k_{AC}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{x_1}{y_1}$

同法一，应用“点差法”得到 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-\frac{3}{4}$，即有 $k_{BC}=-\frac{3}{4k_{AC}}=\frac{3y_1}{4x_1}$，

又由 $B(-x_1,-y_1)$，$D\left(x_1,\frac{y_1}{2}\right)$，则 $k_{BD}=\frac{\frac{y_1}{2}+y_1}{x_1+x_1}=\frac{3y_1}{4x_1}$，

$\therefore k_{BC}=k_{BD}$，故 B、C、D 三点共线. ……………………………………12 分

（说明：此问也可通过借助坐标运算证明 $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{BD}$，得到三点共线，具体方法过程略.）

22．解：（Ⅰ）由题可得 $\rho^2=\frac{2}{1+\sin^2\theta}$，即有 $\rho^2+\rho^2\sin^2\theta=2$，

结合转换公式 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$，

代入整理 $x^2+2y^2=2$，

经检验，曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………5 分

（Ⅱ）由已知易得，直线 l 经过定点 $(-1,0)$，且其倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，

由此其参数方程也可改写为 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），**（也称之为该直线的标准参数方程）**

将其代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，整理可得 $3t^2-2\sqrt{2}t-2=0$，显然其 $\Delta>0$，

设 M、N 两点对应的参数分别为 t_1、t_2，则有 $t_1+t_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$t_1t_2=-\frac{2}{3}$，

所以 $|MN|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………10 分

（说明：显然，此问也可直接解出参数值求之，或者用直线的普通方程与曲线 C 联立求解之.）

2023-2 高三

23．解：（Ⅰ）法一：由题得 $f(x)=\begin{cases}-1,x\le 1\\2x-3,1<x<2\\1,x\ge 2\end{cases}$，

其中，当 $1<x<1$ 时，$f(x)\in(-1,1)$，从而易得函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$． ....5 分

法二：由绝对值不等式的性质可得，$|f(x)|=\big||x-1|-|x-2|\big|\le|(x-1)-(x-2)|=1$，

所以 $-1\le f(x)\le 1$，当且仅当 $(x-1)(x-2)\ge 0$，即 $x\le 1$ 或 $x\ge 2$ 时取得等号，

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$． ....5 分

（Ⅱ）法一：由基本不等式，得 $\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}=\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)(a^2+b^2)=1+\frac{b^2}{2a^2}+\frac{a^2}{2b^2}\ge 2$，

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号，故 $\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}$ 的最小值为 2． ....7 分

法二：由柯西不等式，得 $\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}=\left(\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right)(a^2+b^2)\ge\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2$，

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取得等号，故 $\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}$ 的最小值为 2． ....7 分

由题得，$4f(x)\le 2$，即 $|x-1|-|x-2|\le\frac{1}{2}$，结合（Ⅰ）之法一（零点分段，讨论求解）

等价于 $\begin{cases}x\le 1\\-1\le\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<x<2\\2x-3\le\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge 2\\1\le\frac{1}{2}\end{cases}$，由此可解得 $x\le\frac{7}{4}$，

故原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{7}{4}\right]$． ....10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。