江汉区2024届高三新起点考试

数 学 参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	B	B	D	B	A	ACD	CD	ABD	BC

13． 3　　14． $\frac{\pi}{3}$　　15．2　　16．8

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解：（1）由 $(2b-c)\cos A=a\cos C$

得：$2b\cos A=a\cos C+c\cos A$

$\therefore 2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)=\sin B$

$\because \sin B\neq 0\therefore \cos A=\frac{1}{2}$. 又 $\because 0<A<\pi\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………5分

（2）由余弦定理得：$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{48+c^2-45}{2\cdot 4\sqrt{3}\cdot c}=\frac{1}{2}$

整理得：$\therefore c^2-4\sqrt{3}c+3=0$.解得：$c=2\sqrt{3}\pm 3$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=6\sqrt{3}+9$ 或 $6\sqrt{3}-9$.……………………………………………10分

18.解：（1）证明：取 BE 的中点 O，连接 A_1O,OC.

$\because A_1B=A_1E$，　$\therefore A_1O\perp BE$.

又 $\because$ 平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$，且平面 $A_1BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$.

$\therefore A_1O\perp$ 平面 $BCDE$． $\therefore A_1O\perp CD$.

$\because OC\perp CD.\therefore CD\perp$ 面 $A_1OC.\therefore CD\perp A_1C$.……………………………………5分

(2) 如图：以 OB,OC,OA_1 所在的直线分别为 x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系.则

$\overrightarrow{A_1C}=(0,2\sqrt{3},-2),\overrightarrow{BC}=(-2,2\sqrt{3},0),\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$.

设平面 BA_1C 的法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$ 则：

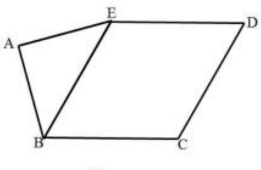

图1

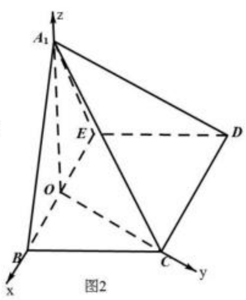

图2

$\begin{cases}2\sqrt{3}y-2z=0\\-2x+2\sqrt{3}y=0\end{cases}$，不妨设 $y=1$，则 $\vec{n}_1=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.

同理可得：平面 DA_1C 的法向量为 $\vec{n}_2=(0,1,\sqrt{3})$.

$\therefore \cos\theta=\left|\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. $\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

$\therefore$ 二面角 $B-A_1C-D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.……………………………………12 分

19．解：（1）由 $2S_n=na_n$，则 $2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}$，两式相减得：$2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n$，

整理得：$(n-1)a_{n+1}=na_n$，即 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n-1}$，

所以 $n\ge 2$ 时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot a_2=\dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dfrac{n-2}{n-3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2}{1}\cdot 3=3(n-1)$ ，

又 $n=1$ 时，$2a_1=a_1$，得 $a_1=0$，也满足上式.故 $a_n=3(n-1)$.……………………………………6 分

(2) 由（1）可知：$b_n=|16-a_n|=|19-3n|$.

记 $C_n=19-3n$，设数列 $\{C_n\}$ 的前 n 项和 $T_n^{'}$.

当 $n\le 6$ 时，$T_n=\dfrac{n(16+19-3n)}{2}=\dfrac{-3n^2+35n}{2}$；

当 $n>6$ 时，$T_n=C_1+C_2+\cdots\cdots+C_6-C_7-\cdots\cdots C_n$

$=T_6^{'}-(T_n^{'}-T_6^{'})=2T_6^{'}-T_n^{'}=102-\dfrac{-3n^2+35n}{2}=\dfrac{3n^2-35n+204}{2}$

综上：$T_n=\begin{cases}\dfrac{-3n^2+35n}{2},n\le 6\\\dfrac{3n^2-35n+204}{2},n>6\end{cases}$ ……………………………………12 分

20．解：（1）$f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a+x=\dfrac{x^2-ax+1}{x}$，

$a\le 2$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增；

当 $a>2$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a+x=\dfrac{x^2-ax+1}{x}=0$ 得：$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$

$f(x)$ 的增区间是 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$，减区间是 (x_1,x_2). ……………………………………4 分

（2）$g(x)=\ln x-ax+a$ 则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，设切点坐标为 (x_0,y_0).

由 $\dfrac{1}{x_0}-a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，得：$x_0=\dfrac{\mathrm{e}}{a\mathrm{e}+1}$.

又 $\because \dfrac{g(x_0)}{x_0}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ $\therefore$ $\ln\dfrac{\mathrm{e}}{a\mathrm{e}+1}+a(1-\dfrac{\mathrm{e}}{a\mathrm{e}+1})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}\times\dfrac{\mathrm{e}}{a\mathrm{e}+1}$.

整理得 $a=\ln(a\mathrm{e}+1)$，即：$e^a=a\mathrm{e}+1$, 得：$e^{a-1}-a-\dfrac{1}{e}=0$.

设 $G(x)=e^{x-1}-x-\dfrac{1}{e}$，$G'(x)=e^{x-1}-1$.

当 $0<x<1$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 递减，

$x>1$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 递增.

又 $G(1)=-\dfrac{1}{e}<0, G(2)=e-2-\dfrac{1}{e}>0$. 所以存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $G(x_0)=0$.

存在 $a>0$，使得直线 $y=\dfrac{x}{e}$ 与函数 $g(x)=f(x)+a-\dfrac{1}{2}x^2$ 的图像相切. ……………………………………12 分

21. 解：（1）由题意可知 ξ 的可能取值有 0、1、2、3，

$P(\xi=0)=\dfrac{C_7^3}{C_{12}^3}=\dfrac{7}{44}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_5^1C_7^2}{C_{12}^3}=\dfrac{21}{44}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_7^1C_5^2}{C_{12}^3}=\dfrac{7}{22}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_5^3}{C_{12}^3}=\dfrac{1}{22}$

所以，随机变量 ξ 的分布列如下表所示：

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{7}{44}$	$\dfrac{21}{44}$	$\dfrac{7}{22}$	$\dfrac{1}{22}$

所以 $E(\xi)=0\times\dfrac{7}{44}+1\times\dfrac{21}{44}+2\times\dfrac{7}{22}+3\times\dfrac{1}{22}=\dfrac{5}{4}$. ……………………………………5 分

（2）他们在每轮答题中取得胜利的概率为

$$Q=C_2^1p_1(1-p_1)C_2^2p_2^2+C_2^2p_1^2C_2^1p_2(1-p_2)+C_2^2p_1^2C_2^2p_2^2$$

$$=2p_1p_2(p_1+p_2)-3(p_1p_2)^2=\frac{8}{3}p_1p_2-3(p_1p_2)^2,$$

由 $0\le p_1\le 1, 0\le p_2\le 1$，$p_1+p_2=\frac{4}{3}$，得 $\frac{1}{3}\le p_1\le 1$，

则 $p_1p_2=p_1(\frac{4}{3}-p_1)=\frac{4}{3}p_1-p_1^2=-(p_1-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{9}$，因此 $p_1p_2\in[\frac{1}{3},\frac{4}{9}]$，

令 $t=p_1p_2\in[\frac{1}{3},\frac{4}{9}]$，$Q=\frac{8}{3}t-3t^2=-3(t-\frac{4}{9})^2+\frac{16}{27}$，于是当 $t=\frac{4}{9}$ 时，$Q_{\max}=\frac{16}{27}$.

要使答题轮数取最小值，则每轮答题中取得胜利的概率取最大值 $\frac{16}{27}$.

设他们小组在 n 轮答题中取得胜利的次数为 ξ，则 $\xi\sim B(n,\frac{16}{27})$，$E(\xi)=\frac{16}{27}n$，

由 $E(\xi)\ge 6$，即 $\frac{16}{27}n\ge 6$，解得 $n\ge 10.125$.

而 $n\in N^*$，则 $n_{\min}=11$，所以理论上至少要进行 11 轮答题. ……………………………………12 分

22.解：（1）由题意知，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2+b^2=5$，且 $a^2=b^2+c^2$.

解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………4 分

（2）由（1）知 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，　不妨设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

设 $AB:x=ty+m$，$\because D(-2,2)$　$\therefore -2=2t+m\ \therefore m=-2-2t$

令 $\begin{cases}x^2+4y^2=4\\x=ty-2t-2\end{cases}$　$\therefore (t^2+4)y^2-(4t^2+4t)y+(4t^2+8t)=0$

则有 $\Delta>0$　$\therefore \begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{4t^2+4t}{t^2+4}\\y_1\cdot y_2=\dfrac{4t^2+8t}{t^2+4}\end{cases}$　由于 C 在直线 OD 上，设 $C(-x_0,x_0)$，

又由于 C 在直线 FA 上，$\therefore \frac{x_0}{-x_0-2}=\frac{y_1}{x_1-2}$

$\therefore x_0=-\frac{2y_1}{x_1+y_1-2}$

$$\because k_1\cdot k_2=\frac{y_2}{x_2+2}\cdot\frac{-\dfrac{2y_1}{x_1+y_1-2}}{\dfrac{2y_1}{x_1+y_1-2}+2}=-\frac{y_1y_2}{(x_2+2)(x_1+2y_1-2)}=-\frac{y_1y_2}{(ty_2-2t)[(t+2)y_1-2t-4]}$$

$$=-\frac{\dfrac{4t^2+8t}{t^2+4}}{(t^2+2t)\cdot\dfrac{4t^2+8t}{t^2+4}-(2t^2+4t)\cdot\dfrac{4t^2+4t}{t^2+4}+(4t^2+8t)}=-\frac{1}{4}.$$

$\therefore k_1k_2=-\frac{1}{4}$. ……………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。