2023届高三五月联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	B	D	C	C	B	ACD	ACD	ABD	BD

一、单选题：

1. D 【解析】$\begin{cases}1-x>0\\ \log_2(1-x)\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}1-x>0,\\ 1-x\geqslant 1\end{cases}$，$\therefore x\leqslant 0$，定义域为$(-\infty,0]$，故选 D.

2. A 【解析】由 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$，得 C 点对应的复数为 $-5+3i$，由 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ 得 B 点对应复数为 $(3+5i)+(-5+3i)=-2+8i$，故选 A.

3. C 【解析】设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\vec{a}\cdot(\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3})=\frac{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}{3}=\frac{4+2\times2\times2\times\cos60^\circ}{3}=\frac{8}{3}$，故选 C.

（建系用坐标运算也是较好选择）

4. B 【解析】A,B,C,D,E,F 表示六个进站口，李明若先到 A 进站口，不超过 200 米的进站口有 B 和 C，此时符合条件的概率为$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}$，同理先到 B,C,D,E,F 的符合条件的概率分别为$\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}$，$\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}$，$\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}$，$\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}$，故所求概率为$\frac{1}{6}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}$，故选 B.

5. D 【解析】$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x-\frac{1}{2}=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，由已知条件 $x=\frac{4\pi}{3}$时 $f(x)$取得最大值，有$\frac{4\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$\frac{4}{3}\omega=2k+\frac{2}{3}$. 又由已知得$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}>\frac{4\pi}{3}$，于是 $0<\omega<\frac{3}{4}$，由于 $k\in\mathbf{Z}$，故 $k=0$，$\omega=\frac{1}{2}$. $f(x)=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$在$\left(\frac{17\pi}{3},a\right)$上单调，故 $a_{\max}=\frac{10\pi}{3}+4\pi=\frac{22\pi}{3}$. 故选 D.

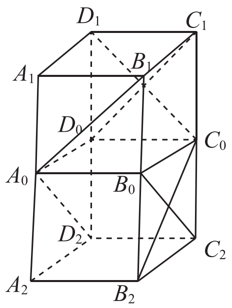
6. C 【解析】7 点 30 分开始过 x 分钟累计到校人数为 $59x+\frac{x(x-1)}{2}\times(-2)=-x^2+60x$

设人工检测$(x-4)$分钟时，不再出现排队，则有 $40x+12(x-4)\geqslant -x^2+60x$

即 $x^2-8x-48\geqslant 0$，解得 $x\geqslant 12$，而且 12 分钟时到校人数 $59-11\times 2=47<52$

$\therefore$人工检测 8 分钟后不再出现排队等候的情况，故选 C.

7. C 【解析】如图，把两个单位正方体叠放在一起（构建模型），平面 $A_0B_0C_2D_2$，



平面 $A_0B_0C_0D_0$，平面 $A_0B_1C_1D_0$ 分别代表第一，二，三个平面，平面 $A_0B_0C_2D_2$

的法向量为 $\overrightarrow{C_0B_2}$，平面 $A_0B_1C_1D_0$ 的法向量为 $\overrightarrow{C_0D_1}$，$\overrightarrow{C_0B_2}$ 与 $\overrightarrow{C_0D_1}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，

故所求锐二面角的大小的余弦值是 $\frac{1}{2}$，故选 C.

8. B 【解析】由两个分段函数在各自区间上单调，存在关于 y 轴对称的两点分别位于

两个函数图象上. 设 $P(x_0,y_0)$ 在 $y=\ln\frac{x}{a}(x>1)$ 的图象上，则 $P'(-x_0,y_0)$ 在函数

$y=ae^{-x}$ 的图象上，故有

$ae^{x_0}=\ln\frac{x_0}{a}(x_0>1)$，即 $e^{x_0+\ln a}+\ln a=\ln x_0$，进而 $e^{x_0+\ln a}+\ln a+x_0=x_0+\ln x_0=e^{\ln x_0}+\ln x_0$.

设 $\varphi(x)=e^x+x$，则 $\varphi(\ln a+x_0)=\varphi(\ln x_0)$，由 $\varphi(x)$ 得单调性得

$\ln a+x_0=\ln x_0$，即 $\ln a=\ln x_o-x_0$

令 $h(x)=\ln x-x$，$x\in(1,+\infty)$，$h'(x)=\frac{1-x}{x}<0$，知 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

故 $h(x)<-1$，$\ln a<-1$，于是 $0<a<\frac{1}{e}$. 选 B.

二、多选题：

9. ACD 【解析】对于 A，由 A、B 是互斥事件，故 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.5+0.3=0.8$，

$\therefore A$ 正确.

对于 B，由 $(C_UA)\cup(C_UB)=C_U(A\cap B)$ 知 $P(\bar{A}+\bar{B})=1-P(AB)=1-0=1$

$\therefore$ B 不正确.

对于 C，由于 A，B 是相互独立事件，$P(AB)=P(A)P(B)$

$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.3-0.5\times0.3=0.65$ $\therefore$ C 正确.

对于 D，$\because P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.5$，$\therefore P(AB)=0.25$，

$\therefore P(B|\bar{A})=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{0.3-0.25}{1-0.5}=0.1$，$\therefore$ D 正确.

10. ACD 【解析】函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴和直线 $x=1$ 对称，因此 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

对于 A，由函数 $f(x)$ 和二次函数的对称轴重合，解析式正确.

对于 B，在同一坐标系中画出函数 $f(x)$ 与 $y=e^{-x}+1$ 的图象，两图象交于 $A(x_1,y_1)$，

$B(x_2,y_2)$，点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $A'(x'_1,y'_1)$，$x_1+x'_1=2$，$x_2>x'$，$\therefore x_1+x_2>2$，

$\therefore$B 不正确.

对于 C，函数 $f(x)$ 在 $[4,5]$ 上单调递增，$[5,6]$ 上单调递减，在 $x=4$ 或 $x=6$ 时有最小值，

而分母中的函数 $y=2^x$ 在 $[4,6]$ 上单调递增，

$\therefore x=6$ 时，$\dfrac{f(x)}{2^x}$ 在 $[4,6]$ 上的最小值是 $\dfrac{1}{64}$，

$\therefore$C 正确.

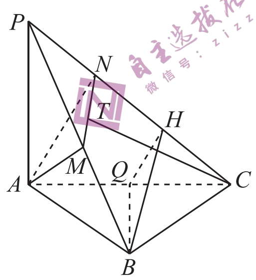
对于 D. $f(\log_4\dfrac{5}{16})=f(\log_4 5-2)=f(\log_4 5)$

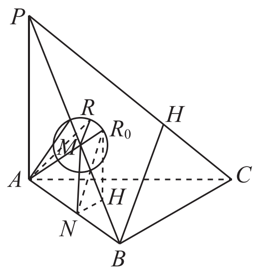
$$\log_3 4-\log_4 5=\frac{\lg 4}{\lg 3}-\frac{\lg 5}{\lg 4}=\frac{\lg^2 4-\lg 3\cdot\lg 5}{\lg 3\cdot\lg 4}>\frac{\lg^2 4-(\frac{\lg 3+\lg 5}{2})^2}{\lg 3\cdot\lg 4}=\frac{\lg^2 4-(\lg\sqrt{15})^2}{\lg 3\cdot\lg 4}>0$$

$\therefore 2>\log_3 4>\log_4 5>1$，又函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，$\therefore f(\log_4 5)>f(\log_3 4)$

$\therefore f(\log_3 4)<f(\log_4\dfrac{5}{16})$ $\therefore$D 正确.

11. ABD 【解析】易知三棱锥 $P-ABC$ 是“基本图”，它各个面均为直角三角形，且 $BC\perp$ 平面 PAB，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$BQ\perp AC$，$BQ\perp$ 平面 PAC





对于 A，由 $BQ\perp$ 平面 PAC 知，$PC\perp BQ$，又由已知 $QH\perp PC$ 得到 $PC\perp$ 平面 BQH，又 $PC\subset$ 平面 PBC，

$\therefore$平面 BQH 垂直于平面 PBC，故 A 正确.

对于 B，过点 C 作 $CT\perp MN$，由于平面 $AMN\perp$ 平面 PBC，且两面的交线为 MN，

由面面垂直的性质得 $CT\perp$ 平面 AMN，$\therefore CT\perp AM$，又 $BC\perp$ 平面 PAB，$\therefore BC\perp AM$，

$\therefore AM\perp$ 平面 PAB，$\therefore AM\perp PB$，B 对.

对于 C，在条件下，N 可以在直线 PC 上运动，$\therefore$C 不正确.

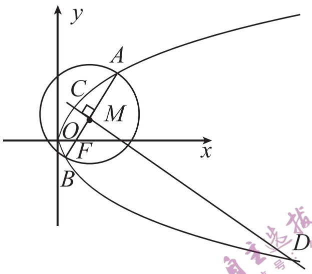
对于 D，R 点的轨迹是以 M 为圆心$\frac{\sqrt{6}}{3}$为半径的半圆，动线段 AR 是半圆锥的母线，

AR 与平面 PBC 所成的角为定角，AR 与 BC 所成的角最小时 $MR_0//BC$.

过 R_0 作 $R_0H\perp$平面 ABC，$HN\perp AB$，垂足为 N，则 R_0N 为 R_0 到直线 AB 的距离.

由四边形 R_0MNH 是矩形得 $R_0N=\sqrt{\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$，$\therefore$D 正确.

12. BD 【解析】分别过 A，B，M 作抛物线准线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，M_1



由于直线 AB 过焦点 F，M 到准线的距离 $|MM_1|=\frac{|AA_1|+|BB_1|}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{|AB|}{2}$，故以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切，故 B 正确.

由于以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切，有 $6+\frac{p}{2}=8$，$\therefore p=4$，故 A 不正确.

$\because AB$ 过焦点 $F(2,0)$，$\therefore k_{AB}=1\therefore$直线 AB 的方程是 $y=x-2$，假设抛物线上存在两点 T，T'关于直线 AB 对称，且 y 设直线 TT'的方程是：$y=-x+m$，代入 $y^2=8x$ 中，得 $y^2+8y-8m=0$，由韦达定理可得 TT'的中点为 $N(m+4,-4)$，又 N 在直线 AB 上，$\therefore -4=m+4-2$，$\therefore m=-6$，但是 $y^2+8y+48=0$ 的 $\Delta<0$，直线 TT'不存在.

$\therefore$C 不正确.

对于 D，直线 CD 的方程为：$y=-x+10$，代入 $y^2=8x$，得 $x^2-28x+100=0$

由韦达定理得，$x_C+x_D=28$，$x_Cx_D=100$.

$|MC|\cdot|MD|=\sqrt{2}(6-x_C)\cdot\sqrt{2}(x_D-6)=-2[x_Cx_D-6(x_C+x_D)+36]=64$

$|MA|\cdot|MB|=8\times8=64$，$\therefore|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$

故 D 正确.

三.填空题：

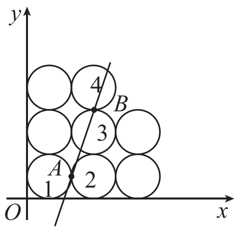
13. 11 【解析】展开式中一次项系数为 $1+C_5^2=11$，故填 11.

14. $\frac{2}{5}$【解析】由简单随机抽样的特点知概率为$\frac{2}{5}$.

或甲乙两人摸球的等可能结果有 A_5^2,其中丙摸出红球的事件占有 $2A_4^2$ 个结果

故丙摸出红球的概率$=\dfrac{2A_4^1}{A_5^2}=\dfrac{2}{5}$.

15. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】过 $A(2,1)$ 的直线将圆 1 与圆 2 平分,过 $B(3,4)$ 的直线将圆 1 与圆 2 平分,且

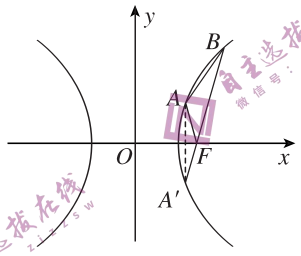


$k_{AB}=3$,故直线 AB 的方程为:$y-1=3(x-2)$,即 $y=3x-5$,故原点 O 到直线

AB 的距离为 $d=\dfrac{5}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

16. $\dfrac{4}{3}$ 【解析】延长 BF 交双曲线右支于 A',由已知 A' 与 A 关于 x 轴对称,设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,

$A'(x_A,-y_A{}')$,则 $|FA|=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}\cdot|y_A|$,$|FB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}|y_B|$,



$\therefore S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}|FA|\cdot|FB|\cdot\sin(\pi-2\alpha)$(其中$\angle BFX=\alpha$)

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\sqrt{\dfrac{5}{4}}\right)^2|y_Ay_B|\cdot\sin2\alpha$

$\because \tan\alpha=2$,

$\therefore \sin2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$

把 $y=2(x-2)$代入 $x^2-y^2=2$ 中得$\dfrac{3}{4}y^2-2y-2=0$

由韦达定理得 $y_B\cdot y_A{}'=\dfrac{-8}{3}$

$\therefore |y_Ay_B|=|y_{A'}y_B|=\dfrac{8}{3}$

$\therefore S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{8}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{3}$.

四. 解答题

17.【解析】(1)证明：$\because a_n\cdot a_{n+1}=2^{9-2n}$ ①

$\therefore n\geqslant 2$ 时，$a_{n-1}\cdot a_n=2^{7-2(n-1)}=2^{9-2n}$ ②

$\frac{①}{②}$得 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{1}{4}$ ………………………………………………………………… 5 分

(2)假设存在正数 λ 使得数列$\{a_n\}$为等比数列，由 $a_1a_2=32$ 得 $a_2=\frac{32}{\lambda}$，

由 $a_2a_3=8$，得 $a_3=\frac{\lambda}{4}$，因为$\{a_n\}$为等比数列，$a_2^2=a_1\cdot a_3$，即$(\frac{32}{\lambda})^2=\lambda\cdot\frac{\lambda}{4}$，$\lambda^2=64$，

$\because \lambda>0$，$\therefore \lambda=8$. ………………………………………………………………………… 7 分

下证：$\lambda=8$ 时，数列$\{a_n\}$是等比数列：

由(1)知数列$\{a_{2n-1}\}$和$\{a_{2n-1}\}$均为公比$\frac{1}{4}$的等比数列.

$\therefore a_{2n-1}=8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^{4-(2n-1)}$，$a_{2n}=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^{4-2n}$

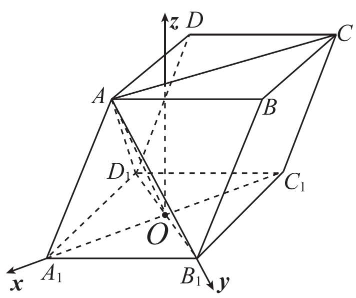
$\therefore n$ 为奇数时，$a_n=2^{4-n}$，n 为偶数时，$a_n=2^{4-n}$

$\therefore$对一切正整数 n，都有 $a_n=2^{4-n}$，……………………………………………………………… 9 分

$\therefore n\geqslant 2$，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，

$\therefore$存在正数 $\lambda=8$，使得数列$\{a_n\}$是等比数列. ……………………………………………… 10 分

18.(1)连结 AC 和 D_1B_1，AD_1，AB_1，$D_1B_1\cap A_1C_1=O$，由底面是菱形得，$D_1B_1\perp A_1C_1$；



由$\triangle AA_1D_1$ 与$\triangle AA_1B_1$ 全等，得 $AD_1=AB_1$，$\because O$ 为 D_1B_1 的中点，$\therefore D_1B_1\perp AO$

又$\because AO\cap A_1C_1=O$，$\therefore D_1B_1\perp$平面 AA_1C_1C， ………………………………………………… 5 分

又$\because D_1B_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$ $\therefore$平面 $AA_1C_1C\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$. ……………………………… 6 分

(2)以 OA_1 为 X 轴，以 OB_1 为 Y 轴，以过 O 与底面垂直的直线为 Z 轴，建立如图空间坐标

系，则 $A_1(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$C_1(-\sqrt{3},0,0)$，$D_1(0,-1,0)$ ………………………………………… 7 分

过 A 作底面的垂线，垂足为 H，由 $A-A_1B_1D_1$ 为正三棱锥知 H 为$\triangle A_1B_1D_1$ 的重心

$\therefore A_1H=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$AH=\sqrt{AA_1^2-A_1H^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore A(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3})$

设 $D(x_D,y_D,z_D)$，由 $\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{D_1D}$，得$(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3})=(x_D,y_D+1,z_D)$

$\therefore D(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，

$\therefore \overrightarrow{B_1D}=\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-2,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ ………………………………………………………………………… 9 分

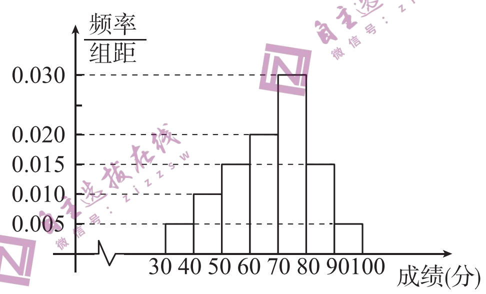
又取平面 AA_1C_1C 的法向量为 $\overrightarrow{B_1D_1}=(0,-2,0)$

设直线 B_1D 与平面 A_1C_1CA 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=\frac{|\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}|}{|\overrightarrow{B_1D}|\cdot|\overrightarrow{B_1D_1}|}=\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{3}+4+\frac{8}{3}}\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$直线 B_1D 与平面 A_1C_1CA 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12 分

19. (1)补全频率分布直方图，如图. ………………………………………………………………… 2 分



百分之八十五分位数是 83.3 ………………………………………………………………………… 4 分

(2) X 服从 $B(2,0.2)$，Y 服从 $B(2,0.5)$，$E(X)=2\times0.2=0.4$，$E(Y)=2\times0.5=1$

$\therefore E(Y)-E(X)=1-0.4=0.6$ ………………………………………………………………… 6 分

随机变量 $Z=Y-X$ 可取 0,1,2

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)$

$=(1-0.5)^2+C_2^1 0.5\times0.2+0.2^2=0.49$； ………………………………………………… 8 分

$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=2)=C_2^1(1-0.5)\times(0.5-0.2)$

$+C_2^1 0.2\times(0.5-0.2)=0.42$ ………………………………………………………………… 10 分

$P(Z=2)=P(X=0,Y=2)=(0.5-0.2)^2=0.09$ ……………………………………………… 11 分

$\therefore E(Z)=0\times0.49+1\times0.42+2\times0.09=0.6$

$\therefore E(Z)=E(Y)-E(X)$ …………………………………………………………………… 12 分

20. (1)设$\angle CAO=\angle BAO=\angle OAB=\angle BCO=\alpha$,

在$\triangle BOC$和$\triangle AOB$中,由正弦定理得$\dfrac{a}{\sin\angle BOC}=\dfrac{OB}{\sin\alpha}=\dfrac{OA}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\angle AOB}$

又$\because \sin\angle BOC=\sin(\pi-\angle B)=\sin B$, $\sin\angle AOB=\sin(\pi-A)=\sin A$

$\therefore \dfrac{a}{\sin\angle BOC}=\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin\angle AOB}=\dfrac{c}{\sin A}$, $\therefore \dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$,又$\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{b}{a}$

$\therefore \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{a}$,即$a^2=bc$. …………………………………………………………………… 6 分

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=cb\cos A=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}=\dfrac{c^2+b^2-bc}{2}=\dfrac{(c+b)^2-3bc}{2}=\dfrac{(4-a)^2-3a^2}{2}$

$=\dfrac{-2a^2-8a+16}{2}=-a^2-4a+8$ …………………………………………………………………… 9 分

又$\because c,a,b$成等比数列,可设$b=\dfrac{a}{q}$, $c=aq$(公比$q\geqslant1$)($b\leqslant a\leqslant c$)

$\therefore \begin{cases} q\geqslant1 \\ a+\dfrac{a}{q}>aq \end{cases}$,解得:$1\leqslant q<\dfrac{\sqrt5+1}{2}$

又由$a+\dfrac{a}{q}+aq=4$,得$a=\dfrac{4}{q+\dfrac{1}{q}+1}\in\left(\sqrt5-1,\dfrac43\right]$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-(a+2)^2+12\in\left[\dfrac89,6-2\sqrt5\right)$ …………………………………………………… 12 分

21. (1)由$|AF_1|+|AF_2|=\sqrt{(\dfrac{\sqrt2}{2})^2+4}+\dfrac{\sqrt2}{2}=2\sqrt2=2a$,得$a=\sqrt2$,

$\because c=1$, $\therefore b=1$

$\therefore$椭圆C的方程是$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$; …………………………………………………………………… 4 分

(2)设$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$,由题意知$x_0, y_0>0$, $y_1,y_2<0$

$S_{\triangle M_2NF_2}-S_{\triangle M_1NF_1}=S_{\triangle M_2F_1F_2}-S_{\triangle M_1F_1F_2}=\dfrac12\times2(|y_2|-|y_1|)=y_1-y_2$ ………………………… 6 分

把QF_1: $x=\dfrac{x_0+1}{y_0}y-1$,代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$中,整理得

$[(x_0+1)^2+2y_0^2]y^2-2(x_0+1)y_0y-y_0^2=0$,又$x_0^2+2y_0^2=2$

$\therefore (3+2x_0)y^2-2(x_0+1)y_0y-y_0^2=0$.

$\therefore y_0 y_1 = -\dfrac{y_0^2}{3+2x_0}$，$\therefore y_1 = -\dfrac{y_0}{3+2x_0}$

同理可得，$y_2 = -\dfrac{y_0}{3-2x_0}$ ………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore y_1 - y_2 = \dfrac{y_0}{3-2x_0} - \dfrac{y_0}{3+2x_0} = \dfrac{4x_0 y_0}{9-4x_0^2} = \dfrac{4x_0 y_0}{9\left(\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2\right)-4x_0^2} = \dfrac{4x_0 y_0}{\dfrac{x_0^2}{2}+9y_0^2}$

$\leqslant \dfrac{4x_0 y_0}{2\sqrt{\dfrac{x_0^2}{2}\cdot 9y_0^2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$（当且仅当 $x_0 = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$y_0 = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 时取等号）

$\therefore S_{\triangle M_2NF_2} - S_{\triangle M_1NF_1}$ 的最大值是 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

22. (1)函数定义域为 $(1,+\infty)$，$f'(x) = 2ax + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2ax^2-2ax+1}{x-1}$

二次函数 $\varphi(x) = 2ax^2-2ax+1$ 的对称轴是 $x=\dfrac{1}{2}$，$\varphi(0)=\varphi(1)=1$

(1)若 $a\geqslant 0$ 时，在 $(1,+\infty)$ 上 $\varphi(x)>0$，从而 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$；

………………………………………………………………………………………………… 2 分

(2)若 $a<0$ 时，$x\in\left(1,\dfrac{a-\sqrt{a^2-2a}}{a}\right)$，$f'(x)>0$；$x\in\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-2a}}{a},+\infty\right)$，$f'(x)<0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(1,\dfrac{a-\sqrt{a^2-2a}}{a}\right)$；单调递减区间是 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-2a}}{a},+\infty\right)$；…… 4 分

（$\dfrac{a-\sqrt{a^2-2a}}{a}$ 写成 $\dfrac{a+\sqrt{a^2-2a}}{a}$，其它正确，只扣 1 分）

(2)由对称性不妨设 $x_1<x_2$，

$\because f(2)=4a$，$\therefore f(x_1)+f(x_2)=2f(2)$

若 $2\leqslant x_1<x_2$，$a>0$，由(1)得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，有

$f(2)<f(x_1)<f(x_2)$，$f(x_1)+f(x_2)>2f(2)$，与已知条件矛盾；

$x_1<x_2\leqslant 2$ 时，同理可推出矛盾.

$\therefore \dfrac{3}{2}<x_1<2<x_2$，$\therefore 2<4-x_1$，………………………………………………………………… 6 分

要证明：$x_1+x_2<4$，只需证明：$x_2<4-x_1$

$\because a>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 只需证明：$f(x_2)<f(4-x_1)$

又 $\because f(x_1)+f(x_2)=8a$，$\therefore$ 只需证明：$8a-f(x_1)<f(4-x_1)$

构造函数 $h(x)=f(4-x)+f(x)-8a$，$x\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$，……………………………………………… 8 分

其中 $h(2)=2f(2)-8a=0$.

$$h'(x)=-f'(4-x)+f'(x)=2ax+\frac{1}{x-1}-2a(4-x)-\frac{1}{3-x}$$

$$=4a(x-2)+\frac{4-2x}{(x-1)(3-x)}=(x-2)\left[4a-\frac{2}{(x-1)(3-x)}\right]$$

$\because \frac{3}{2}<x<2 \therefore x-2<0,\frac{2}{(x-1)(3-x)}<\frac{8}{3}$

当 $a>2$ 时, $4a-\frac{2}{(x-1)(3-x)}>0$

$\therefore h'(x)<0, h(x)$ 在 $(\frac{3}{2},2)$ 单调递减, $h(x)>h(2)=0$

$\therefore x\in(\frac{3}{2},2)$ 时, $f(4-x)+f(x)-8a>0$

$\therefore 8a-f(x_1)<f(4-x_1)$ 成立

$\therefore f(x_2)<f(4-x_1)$

由 $f(x)$ 在定义域内单调递增得, $x_2<4-x_1$, 即 $x_1+x_2<4$ 成立. ………………………………… 12 分

(从函数的凸凹性判断并证明酌情给分)