

华大新高考联盟 2020 届高三 1 月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准



扫码关注 查询成绩

一、选择题

1. 【答案】B

【命题意图】本题考查复数的运算、复数的概念，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意， $z = (2+5i)(3-i) = 6-2i+15i+5 = 11+13i$ ，故  $|z| = \sqrt{121+169} = \sqrt{290}$ ，故选 B.

2. 【答案】C

【命题意图】本题考查集合的表示、集合的运算，考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意， $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，则  $M = \{-1, 0, 2, 5, 6\}$ ，故  $M \cap N = \{-1, 2, 5\}$ ，则  $M \cap N$  的元素个数为 3，故选 C.

3. 【答案】B

【命题意图】本题考查指数的大小比较，考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意， $a = \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} > 6^0 = 1$ ， $b = \log_{\frac{4}{21}} \frac{4}{21} < \log_{\frac{4}{21}} 1 = 0$ ， $0 < c = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{9}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ ，故  $a > c > b$ ，故选 B.

4. 【答案】B

【命题意图】本题考查推理与证明，考查推理论证能力以及分类讨论思想.

【解析】依题意，三个人制作的所有情况如下所示：

	1	2	3	4	5	6
鸿福齐天	小明	小明	小红	小红	小金	小金
国富民强	小红	小金	小金	小明	小红	小明
兴国之路	小金	小红	小明	小金	小明	小红

若小明的说法正确，则均不满足；若小红的说法正确，则 4 满足；若小金的说法正确，则 3 满足. 故“鸿福齐天”的制作人是小红，故选 B.

5. 【答案】A

【命题意图】本题考查函数的图像与性质，考查推理论证能力以及数形结合思想.

【解析】依题意， $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} + \frac{(-x)^2 \cos(-x)}{20} = \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2 \cos x}{20} = f(x)$ ，故函数  $f(x)$  为偶函数，

图像关于  $y$  轴对称，排除 C；而  $f(\pi) = -\frac{\pi^2}{20} < 0$ ，排除 B； $f(2\pi) = \frac{\pi^2}{5} > 0$ ，排除 D. 故选 A.

6. 【答案】B

【命题意图】本题考查系统抽样，考查数学建模能力以及必然与或然思想.

【解析】依题意，将这 800 人分为 100 组，每组 8 人，即分段间隔为 8；因为  $\frac{105-25}{8} = 10$ ，故①正确；若 32 号员工被抽到，则 1 到 100 号的员工中被抽取的号码为 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96，共计 12 人，故②错误；若 88 号员工未被抽到，则 10 号员工可能被抽到，故③错误. 故选 B.

7. 【答案】B

【命题意图】本题考查向量的坐标运算、向量的数量积应用，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意， $a-2b = (m+2, -3)$ ，而  $(a-2b) \cdot b = 0$ ，即  $-m-2-6=0$ ，解得  $m = -8$ ，则  $\cos \langle a, b \rangle = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ ，故选 B.

**8.【答案】B**

【命题意图】本题考查诱导公式、两角差的正切公式，考查运算求解能力以及化归与转化思想。

【解析】 $\tan \alpha = \tan[(\alpha + \beta) - \beta] = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \beta}{1 + \tan(\alpha + \beta)\tan \beta} = \frac{1}{7}, \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} = 7$ , 故选 B.

**9.【答案】A**

【命题意图】本题考查算法与程序框图，考查推理论证能力以及化归与转化思想。

【解析】程序框图是为了计算 7 个数的方差，即输出的  $S = \frac{1}{7}[(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + \dots + (x_7 - 20)^2]$ ，观察可知，选 A.

**10.【答案】B**

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查运算求解能力以及数形结合思想。

【解析】不妨设  $m > 0$ ， $|NF_2|$  即为双曲线的焦点到渐近线的距离，故  $|NF_2| = b$ ，因为  $\triangle NOF_2$  的面积是  $\triangle MON$  的 2 倍，故  $2S_{\triangle NOF_2} = 3S_{\triangle NOF_2}$ ，不妨设  $m > 0$ ，则直线  $MF_2: y = -\frac{a}{b}(x - c)$ ，故  $m = \frac{ac}{b}$ ，而

$2|MF_2| = 3|NF_2|$ ，则  $2\sqrt{\frac{a^2c^2}{b^2} + c^2} = 3b$ ，即  $3a^2 = c^2$ ，故  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ，故选 B.

**11.【答案】B**

【命题意图】本题考查解三角形，考查运算求解能力以及化归与转化思想。

【解析】因为  $\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \sqrt{7}$ ，且  $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$ ，解得  $\sin C = \frac{\sqrt{14}}{4}$ ， $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，而  $c = 2a$ ， $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ ，

所以  $\sin A = \frac{1}{2}\sin C = \frac{\sqrt{14}}{8}$ ， $\cos A = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ ，故  $\sin B = \sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ ，因为  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ， $b = 3\sqrt{2}$ ，故  $a = 2$ ，故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ，故选 B.

**12.【答案】C**

【命题意图】本题考查椭圆的方程与性质，考查运算求解能力以及数形结合思想。

【解析】设  $PF_1 = n$ ， $PF_2 = m$ ，由  $x_1 > 0, y_1 > 0$  知  $m < n$ ，由  $P(x_1, y_1), Q(-x_1, -y_1)$  在椭圆  $C$  上， $|PQ| = 2|OF_2|$  可知四边形  $PF_1QF_2$  为矩形， $QF_1 = QF_2$ ；由  $\frac{|QF_1|}{|PF_1|} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，可得  $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \frac{m}{n} < 1$ ，由椭圆的定义可得  $m + n = 2a, m^2 + n^2 = 4c^2$ ，平方相减可得  $mn = 2(a^2 - c^2)$ ，所以  $\frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} = \frac{m^2 + n^2}{mn} \geq \frac{m}{n} + \frac{n}{m}$ ，而  $2 < \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，即  $2 < \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} \leq \frac{3\sqrt{4}}{3}$ ，由  $2 < \frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)}$  可得  $a^2 < 2c^2, e = \frac{c}{a} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，由  $\frac{4c^2}{2(a^2 - c^2)} \leq \frac{3\sqrt{4}}{3}$ ，可得  $\frac{c^2}{a^2} \leq \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ ，所以  $e = \frac{c}{a} \leq \sqrt{3} - 1$ ，所以  $\frac{\sqrt{2}}{2} < e \leq \sqrt{3} - 1$ ，故选 C.

**二、填空题**
**13.【答案】 $y = 2x$** 

【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力以及数形结合思想。

【解析】依题意， $y' = \frac{(2x+2)e^x - e^x(x^2+2x)}{e^{2x}} = \frac{(2x+2) - (x^2+2x)}{e^x}$ ，故  $k = y'|_{x=0} = 2$ ，故所求切线方程为  $y = 2x$ .

**14.【答案】 $\frac{2^{n+1}}{3}$** 

【命题意图】本题考查等比数列的通项公式、前  $n$  项和公式，考查运算求解能力以及化归与转化思想。

- 【解析】记数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 显然  $q \neq 1$ , 则  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1-q^1}{1-q^2} = 1+q^2 = 5$ , 解得  $q = \pm 2$ ; 而  $a_n > 0$ , 故  $q = 2$ , 故  $S_2 = a_1 + a_2 = 3a_1 = 4$ , 解得  $a_1 = \frac{4}{3}$ , 故  $a_n = \frac{4}{3} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^{n+1}}{3}$ .
15. 【答案】 $[-\sqrt{6} + \sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$   
 【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质, 考查运算求解能力以及数形结合思想.  
 【解析】依题意,  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - (\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \sin^2 x) + \sqrt{3} = \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3} = \sqrt{6} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{3}$ , 当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时,  $2x - \frac{\pi}{4} \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ , 故  $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \in [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ , 故  $\sqrt{6} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3} \in [-\sqrt{6} + \sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ .
16. 【答案】 $\frac{81}{4}$   
 【命题意图】本题考查组合体与球, 考查空间想象能力以及数形结合思想.  
 【解析】依题意,  $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R = 3$ , 将四棱锥  $P-ABCD$  补成长方体, 可知外接球的直径为长方体的体对角线, 设长方体的长、宽、高分别为  $a, b, c$ , 且  $c = 3$ , 由于  $a^2 + b^2 = 27$ , 又  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , 当且仅当  $a = b = \frac{3\sqrt{6}}{2}$  时等号成立, 此时  $(ab)_{\max} = \frac{27}{2}$ , 要使得四棱锥  $M-ABCD$  的体积最大, 只需点  $M$  为平面  $ABCD$  的中心  $O'$  与球心  $O$  所在的直线与球的交点, 又  $OO' = \sqrt{R^2 - (\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2})^2} = \sqrt{9 - \frac{27}{4}} = \frac{3}{2}$ , 故  $M-ABCD$  体积的最大值为  $\frac{1}{3} \times \frac{27}{2} \times (\frac{3}{2} + 3) = \frac{81}{4}$ .

### 三、解答题

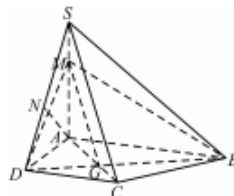
17. 【命题意图】本题考查频率分布直方图, 样本的数字特征, 考查运算求解能力以及必然与或然思想.  
 【解析】(1) 依题意,  $(0.00015 + 0.0002 + a + 0.00006) \times 2000 = 1$ , ..... 2分  
 解得  $a = 0.00009$ . ..... 4分  
 (2) 由图可知, A 地区 200 家实体店该品牌洗衣机的月经济损失的众数为 3000, ..... 6分  
 第一块小矩形的面积  $S_1 = 0.3$ , 第二块小矩形的面积  $S_2 = 0.4$ ,  
 故所求中位数在  $[2000, 4000)$  之间, 故所求中位数为  $2000 + \frac{0.5 - 0.3}{0.0002} = 3000$ . ..... 9分  
 (3)  $\bar{x} < 6000$ . ..... 12分
18. 【命题意图】本题考查等差数列的通项公式、前  $n$  项和公式、等比数列的前  $n$  项和公式, 考查运算求解能力以及函数与方程思想.  
 【解析】(1) 记数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,  $S_{15} = 30 \Rightarrow 15a_8 = 30 \Rightarrow a_8 = 2$ . ..... 1分  
 故  $d = \frac{a_{10} - a_8}{10 - 8} = 1$ , ..... 2分  
 故  $a_n = a_{10} + (n - 10)d = 4 + n - 10 = n - 6$ , ..... 3分  
 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = -5n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{11n}{2}$ . ..... 5分  
 (2) 依题意,  $2^{n+4} + a_n = n - 6 + 2^{n-2}$ ,  
 $T_n = (-5 - 4 + \dots + n - 6) + (2^{-1} + 2^0 + \dots + 2^{n-2}) = \frac{n(n-11)}{2} + \frac{2^n - 1}{2}$ , ..... 7分  
 当  $n = 1$  时,  $T_1 = \frac{-1 \times 10 + 2^1 - 1}{2} < 0$ ;

当  $n=2$  时,  $T_2 = \frac{-2 \times 9 + 2^2 - 1}{2} < 0$ ;  
 当  $n=3$  时,  $T_3 = \frac{-3 \times 8 + 2^3 - 1}{2} < 0$ ;  
 当  $n=4$  时,  $T_4 = \frac{-4 \times 7 + 2^4 - 1}{2} < 0$ ; ..... 9 分  
 当  $n \geq 5$  时,  $\frac{n(n-11)}{2} \geq -15, \frac{2^n - 1}{2} \geq \frac{31}{2}$ , 所以  $T_n > 0$ . ..... 11 分  
 故满足  $T_n > 0$  的最小正整数  $n$  的值为 5. .... 12 分

19. 【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的结构特征、空间想象能力以及数形结合思想.

【解析】(1) 连接  $MG$ .  
 因为  $AB \perp AD, AD \perp DC$ , 故  $AB \parallel CD$ . ..... 1 分  
 设  $DC=1, AB=2$ , 得  $\frac{AG}{GC} = \frac{AB}{DC} = 2$ . ..... 3 分  
 因为  $SC \parallel$  平面  $MBD$ , 平面  $SAC \cap$  平面  $MBD = MG, SC \subset$  平面  $SAC$ ,  
 故  $SC \parallel MG$ , 故  $\frac{SM}{MA} = \frac{CG}{AG} = \frac{1}{2}$ . ..... 5 分

(2) 在平面  $SAD$  内作  $AN \perp SD$  于点  $N$ ,  
 因为  $SA \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $DC \perp SA$ ,  
 又  $DC \perp AD, SA \cap AD = A$ , 得  $DC \perp$  平面  $SAD$ . ..... 7 分  
 因为  $AN \subset$  平面  $SAD$ , 所以  $CD \perp AN$ .  
 又  $SD \cap CD = D$ , 所以  $AN \perp$  平面  $SCD$ . ..... 9 分



因为直线  $SC$  与平面  $ABCD$  所成角的余弦值为  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  
 即  $\sin \angle ASC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  
 又  $AC = \sqrt{2}$ , 故  $SC = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,  
 则  $SA = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 而  $AD=1, SA \perp AD$ , 得  $SD = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . ..... 11 分  
 $AN = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 即点  $A$  到平面  $SCD$  的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . ..... 12 分

20. 【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质, 考查推理论证能力以及函数与方程思想.

【解析】(1) 依题意,  $f'(x) = \frac{-x \cos x + \sin x - \pi}{x^2}$ . ..... 1 分  
 令  $g(x) = -x \cos x + \sin x - \pi$ , 则  $g'(x) = x \sin x$ . ..... 2 分  
 故当  $x \in (0, \pi)$  时,  $g'(x) > 0$ , 当  $x \in (\pi, 2\pi)$  时,  $g'(x) < 0$ . ..... 3 分  
 故  $[g(x)]_{\max} = g(\pi) = 0$ , 故  $g(x) \leq 0$  在  $(0, 2\pi)$  上恒成立. .... 4 分  
 故  $f'(x) \leq 0$ . ..... 5 分  
 即函数  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  上单调递减. .... 6 分

(2) 依题意,  $f(x) > a \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\pi}{x} + a \ln x - \frac{\sin x}{x} > 0$ .  
 下面证明: ① 当  $x \in (0, \pi)$  时,  $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$ ; ② 当  $0 < a < \pi$  时,  $\frac{\pi}{x} + a \ln x > 1$ ;  
 事实上,  $h(x) = x - \sin x$ , 则  $h'(x) = 1 - \cos x > 0$ , 所以  $h(x) = x - \sin x$  在  $(0, \pi)$  上单调递增,

故  $h(x) > h(0) = 0$ , 则  $x - \sin x > 0$ ,  
 又  $x > 0, \sin x > 0$ , 则  $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$ , ..... 8分  
 令  $s(x) = \frac{\pi}{x} + a \ln x$ , 则  $s'(x) = \frac{a}{x} - \frac{\pi}{x^2} = \frac{ax - \pi}{x^2}$ ,  
 由  $s'(x) = 0$ , 得  $s(x)$  的极小值点为  $x_0 = \frac{\pi}{a}$ , 若  $x_0 = \frac{\pi}{a} \in (0, \pi)$ , 则  $1 < a < \pi$ ,  
 则  $s(x_0) = \frac{\pi}{x_0} + a \ln x_0 = a + a \ln \frac{\pi}{a} > a > 1$ , 故  $s(x) = \frac{\pi}{x} + a \ln x > 1$ , ..... 10分  
 若  $x_0 = \frac{\pi}{a} \geq \pi$ , 即  $0 < a \leq 1$ , 则  $s(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减, 故  $s(x) > s(\pi) = 1 + a \ln \pi > 1$ . ..... 11分  
 综上所述, 当  $0 < a < \pi$  时,  $\frac{\pi}{x} + a \ln x > 1$ ,  
 则  $\frac{\pi}{x} + a \ln x - \frac{\sin x}{x} > 0$ , 即  $f(x) > a \ln \frac{1}{x}$ . ..... 12分

21. 【命题意图】本题考查直线与椭圆的关系、基本不等式, 考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则  $\frac{x_1^2}{5} + y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{5} + y_2^2 = 1$ , ..... 1分

两式相减, 可得  $\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{5} + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$ , ..... 2分

即  $\frac{4(x_1 - x_2)}{5} + \frac{2(y_1 - y_2)}{3} = 0$ , ..... 3分

解得  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{6}{5}$ , 即直线  $MN$  的斜率为  $-\frac{6}{5}$ . ..... 5分

(2) 显然直线  $NF_1$  的斜率不为 0, 设直线  $NF_1: x = my - 2, N(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$ ,

联立  $\begin{cases} x = my - 2, \\ x^2 + 5y^2 = 5, \end{cases}$  消去  $x$  整理得  $(m^2 + 5)y^2 - 4my - 1 = 0$ , ..... 7分

显然  $\Delta = 20(m^2 + 1) > 0$ , 故  $y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 + 5}, y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 5}$ , ..... 8分

故  $\triangle PMN$  的面积  $S_{\triangle PMN} = 2S_{\triangle OPN} = 2 \times \frac{1}{2} \times |OF_1| \times |y_1 - y_2| = \frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 5}$ , ..... 9分

令  $\sqrt{m^2 + 1} = t$ , 其中  $t \geq 1$ ,  $S_{\triangle PMN} = \frac{4\sqrt{5}t}{t^2 + 4} = \frac{4\sqrt{5}}{t + \frac{4}{t}} \leq \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{t \cdot \frac{4}{t}}} = \sqrt{5}$ , ..... 11分

当且仅当  $t = 2$ , 即  $m = \pm\sqrt{3}$  时等号成立, 即  $\triangle PMN$  面积的最大值为  $\sqrt{5}$ . ..... 12分

22. 【命题意图】本题考查极坐标方程与直角坐标方程、参数方程与普通方程的转化、极坐标的几何意义, 考查推理论证能力以及数形结合思想.

【解析】(1) 依题意, 曲线  $C_1: (x-2)^2 + y^2 = 4$ , 即  $x^2 + y^2 - 4x = 0$ , ..... 1分

故  $\rho^2 - 4\rho \cos \theta = 0$ , 即  $\rho = 4 \cos \theta$ . ..... 3分

因为  $\rho^2 = \frac{4}{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}$ , 故  $\rho^2 \cos^2 \alpha + 4\rho^2 \sin^2 \alpha = 4$ ,

即  $x^2 + 4y^2 = 4$ , 即  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . ..... 5分

(2) 将  $\theta = \theta_0$  代入  $\rho^2 = \frac{4}{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}$ , 得  $\rho_0^2 = \frac{4}{1 + 3 \sin^2 \theta_0}$ ,

将  $\theta = \theta_0$  代入  $\rho = 4 \cos \theta$ , 得  $\rho_0 = 4 \cos \theta_0$ , ..... 6分



由  $|OP| = 2|OQ|$ , 得  $\rho_P = 2\rho_Q$ , 即  $(4\cos\theta_0)^2 = \frac{16}{1+3\sin^2\theta_0}$ , ..... 7分

解得  $\sin^2\theta_0 = \frac{2}{3}$ , 则  $\cos^2\theta_0 = \frac{1}{3}$ .

又  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , 故  $\rho_Q = \sqrt{\frac{4}{1+3\sin^2\theta_0}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\rho_P = 4\cos\theta_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , ..... 9分

故  $\triangle MPQ$  的面积  $S_{\triangle MPQ} = S_{\triangle OMP} - S_{\triangle OMQ} = \frac{1}{2} \cdot |OM| \cdot (\rho_P - \rho_Q) \cdot \sin\theta_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . ..... 10分

23. 【命题意图】本题考查证明不等式的方法, 基本不等式, 考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】(1) 要证  $a^4 - a^2b^2 + b^4 \geq \frac{ab(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2}$ ,

即证  $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \geq ab(a^4 + b^4)$ , ..... 1分

即证  $a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5$ , ..... 2分

即证  $a^6 + b^6 - a^5b - ab^5 \geq 0$ ,

即证  $a^5(a-b) - (a-b)b^5 \geq 0$ ,

即证  $(a^5 - b^5)(a-b) \geq 0$ , ..... 4分

该式显然成立, 当且仅当  $a=b$  时等号成立,

故  $a^4 - a^2b^2 + b^4 \geq \frac{ab(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2}$ . ..... 5分

(2) 由基本不等式得  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ , ..... 6分

$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab$ ,  $b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc$ ,  $a^3 + c^3 + 1 \geq 3ac$ ,

当且仅当  $a=b=c=1$  时等号成立. .... 7分

将上面四式相加, 可得  $3a^3 + 3b^3 + 3c^3 + 3 \geq 3abc + 3ab + 3bc + 3ac$ , ..... 9分

即  $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ac$ . ..... 10分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站( www.zizzs.com )和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

**温馨提示：**

全国重点中学 2020 届高三上学期期末考试试题答案汇总

<http://www.zizzs.com/c/202001/41635.html>