高二下学期期末调研考试

数学参考答案

1. A　因为 $A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|x^2+2x-3<0\}=\{x|-3<x<1\}$，所以 $A\cup B=\{x|-3<x<3\}$.

2. C　全称量词命题的否定是存在量词命题.

3. C　因为英文字母有 26 个，所以 2 个英文字母的排列有 A_{26}^{2} 种. 因为数字有 10 个，所以数字的排列有 A_{10}^{2} 种，所以该密码可能的个数是 $\mathrm{A}_{26}^{2}\mathrm{A}_{10}^{2}$.

4. D　因为 $a=\log_4 0.3<0$，$b=6^{0.5}>1$，$c=(\frac{1}{3})^{2.1}\in(0,1)$，所以 $a<c<b$.

5. D　$(9x+\frac{8}{\sqrt{x}})^5$ 的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(9x)^{5-r}(8x^{-\frac{1}{2}})^r=\mathrm{C}_5^r9^{5-r}8^rx^{5-\frac{3}{2}r}$. 令 $5-\frac{3}{2}r=2$，得 $r=2$，所以展开式中 x^2 的项为 $T_{2+1}=\mathrm{C}_5^2\times9^3\times8^2x^2$.

6. C　当 $x=0$ 时，$y=-f(1)=0$，所以排除 D；当 $x=1$ 时，$y=-f(0)=0$，所以排除 B；当 $x=-1$ 时，$y=-f(2)=-\ln 2<0$，所以排除 A.

7. A　令 $n-3m=x(m+n)+y(m-n)$，则 $\begin{cases}x+y=-3,\\x-y=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$ 因为 $-3<m+n<3$，所以 $-3<-(m+n)<3$. 因为 $1<m-n<5$，所以 $-10<-2(m-n)<-2$，故 $-13<n-3m<1$.

8. B　将 2 道必须相邻的工序捆绑在一起看作一个元素，加工顺序的种数为 $\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_4^2=144$.

9. BD　由题意知 $p\Rightarrow q\Leftarrow r\Leftrightarrow s$，$p\not\Rightarrow r$，$r\not\Rightarrow p$，所以 s 是 q 的充分不必要条件，r 是 q 的充分不必要条件，q 是 s 的必要不充分条件，p 是 s 的既不充分也不必要条件.

10. AD　由题知 X 可能取 1，2，3，则 $P(X=1)=\frac{\mathrm{C}_8^1\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{1}{15}$，$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_8^2\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{7}{15}$，$P(X=3)=\frac{\mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{7}{15}$，所以 $E(X)=\frac{1+14+21}{15}=\frac{12}{5}$，$D(X)=(1-\frac{12}{5})^2\times\frac{1}{15}+(2-\frac{12}{5})^2\times\frac{7}{15}+(3-\frac{12}{5})^2\times\frac{7}{15}=\frac{28}{75}$. 因为 $Y\sim B(3,\frac{4}{5})$，所以 $E(Y)=\frac{12}{5}$，$D(Y)=3\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{12}{25}$，所以 $E(X)=E(Y)$，$D(X)<D(Y)$.

11. ACD　若 $a<b$，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，所以 $ab<0$，故 A 正确；若 $a>b>0$，$c<d<0$，$e>0$，则 $\frac{e}{a-c}-\frac{e}{b-d}=\frac{e(b-d)-e(a-c)}{(a-c)(b-d)}=\frac{e(b-a+c-d)}{(a-c)(b-d)}<0$，所以 $\frac{e}{a-c}<\frac{e}{b-d}$，故 B 不正确；若 $c>a>b>0$，则 $\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}=\frac{a(c-b)-b(c-a)}{(c-a)(c-b)}=\frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)}>0$，故 C 正确；若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$，故 D 正确.

12. AC　因为 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(-x+2)=f(x+2)$，所以 $f(-x+2)=f(x+2)=-f(x-2)$，所以 $f(x+4)=-f(x)$，所以 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为

8,故 B 错误. 因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$. 因为 $f(-x+4)=-f(x-4)=-f(x+4)$,所以 $f(x+4)$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(4,0)$ 对称,故 A,C 正确. 因为 $f(2024)=f(0)=0$,所以 D 错误.

13. 3 因为 $C_{n+1}^{n-1}=C_{n+1}^{2}=\frac{(n+1)n}{2}$,$A_{n-1}^{2}=(n-1)(n-2)$,所以 $\frac{(n+1)n}{2}=3(n-1)(n-2)$,整理得 $5n^2-19n+12=(n-3)(5n-4)=0$,故 $n=3$ 或 $\frac{4}{5}$(舍去).

14. $\frac{11}{35}$ 设事件 A="任意调查一名学生,每天玩手机超过 1 h",则 $P(A)=0.3$,所以 $P(\overline{A})=0.7$. 设事件 B="任意调查一名学生,该学生近视",则 $P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})=0.6\times0.3+P(B|\overline{A})\times0.7=0.4$,所以 $P(B|\overline{A})=\frac{11}{35}$.

15. 1;$y=3x-\pi-1$ 因为 $f(x)=\cos^3x-f'(0)\sin x+2x$,所以 $f'(x)=-3\cos^2x\sin x-f'(0)\cos x+2$,所以 $f'(0)=-f'(0)+2$,所以 $f'(0)=1$. 因为 $f(\pi)=-1+2\pi$,$f'(\pi)=3$,所以所求切线方程为 $y-(-1+2\pi)=3(x-\pi)$,即 $y=3x-\pi-1$.

16. 12 因为 $ab=a+2b+6$,所以 $a\cdot2b=2(a+2b)+12$. 因为 $a>0$,$b>0$,所以 $a\cdot2b\leqslant(\frac{a+2b}{2})^2$,所以 $2(a+2b)+12\leqslant(\frac{a+2b}{2})^2$,整理得 $(a+2b)^2-8(a+2b)-48=(a+2b-12)(a+2b+4)\geqslant0$,所以 $a+2b\geqslant12$ 或 $a+2b\leqslant-4$(舍去),故 $a+2b$ 的最小值为 12,当且仅当 $a=2b=6$ 时,等号成立.

17. 解:(1)由列联表知,未服用药物 M 的动物有 100 只,其中患疾病 N 的有 40 只,……… 2 分

所以估计未服用药物 M 的动物中患疾病 N 的概率为 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$. ………………………… 4 分

(2)零假设为 H_0:认为药物 M 对预防疾病 N 没有效果,……………………………………… 5 分

$\chi^2=\frac{200\times(40\times80-20\times60)^2}{140\times60\times100\times100}=\frac{200}{21}\approx9.524>7.879$, ………………………………… 8 分

所以根据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,可以推断 H_0 不成立,

所以认为药物 M 对预防疾病 N 有效果,此推断犯错误的概率不大于 0.005. ……… 10 分

18. 解:(1)因为 $\overline{x}=\frac{1}{5}(9+9.5+10+10.5+11)=10$,$\overline{y}=\frac{1}{5}(21+20+18+16+15)=18$. ……………………………………………………………………………………… 1 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(9-10)(21-18)+(9.5-10)(20-18)+(10-10)(18-18)+(10.5-10)(16-18)+(11-10)(15-18)=-8$, ……………………………………………… 2 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(9-10)^2+(9.5-10)^2+(10-10)^2+(10.5-10)^2+(11-10)^2=2.5$, ……………………………………………………………………………………… 3 分

$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=(21-18)^2+(20-18)^2+(18-18)^2+(16-18)^2+(15-18)^2=26$, …… 4 分

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{-8}{\sqrt{65}}\approx-0.99$. ………………………………… 5 分

因为相关系数 r 近似为 -0.99，所以说明 y 与 x 的线性相关性很强. ……………… 6 分

(2)因为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{-8}{2.5}=-3.2$，…………………………………………………… 8 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}+3.2\overline{x}=50$，……………………………………………………………… 9 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+50$. ………………………………… 10 分

当 $x=15$ 时，$\hat{y}=2$，故当售价为 15 元时，预测销量可达到 2 千枚. ……………… 12 分

19. 解：(1)因为 $f(x)=x^3-ax^2+x$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax+1$. ……………………… 1 分

因为 $f(x)$ 的一个极值点为 1，所以 $f'(1)=3-2a+1=0$，所以 $a=2$. ……………… 3 分

因为 $f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$，………………………………………………… 4 分

所以 $f(x)$ 在 $(\dfrac{1}{3},1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\dfrac{1}{3})$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，……………… 5 分

所以 $f(x)$ 的极小值点为 1，符合题意. ………………………………………………… 6 分

(2)设切点为 $(x_0,f(x_0))$，则 $f(x_0)=x_0^3-2x_0^2+x_0$，$f'(x_0)=3x_0^2-4x_0+1$，…………… 7 分

所以切线方程为 $y-(x_0^3-2x_0^2+x_0)=(3x_0^2-4x_0+1)(x-x_0)$. ……………………… 8 分

将点 $(0,0)$ 代入得 $-(x_0^3-2x_0^2+x_0)=(3x_0^2-4x_0+1)(-x_0)$，

整理得 $x_0^2(x_0-1)=0$，所以 $x_0=0$ 或 $x_0=1$. ………………………………………… 10 分

当 $x_0=0$ 时，切线方程为 $y=x$；………………………………………………………… 11 分

当 $x_0=1$ 时，切线方程为 $y=0$. ……………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设从 A,B,C 三个社区中各选取的 1 名居民的每周运动总时间超过 5 小时分别为事件 A,B,C，

则 $P(A)=\dfrac{1}{5}$，$P(B)=\dfrac{3}{10}$，$P(C)=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………… 2 分

设选取的 3 名居民中至少有 1 名居民每周运动总时间超过 5 小时为事件 M，则事件 M 的对立事件为选取的 3 名居民每周运动总时间都没有超过 5 小时，

所以 $P(M)=1-P(\overline{M})=1-(1-\dfrac{1}{5})(1-\dfrac{3}{10})(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{18}{25}$，故选取的 3 名居民中至少有 1 名居民每周运动总时间超过 5 小时的概率为 $\dfrac{18}{25}$. ………………………………………… 4 分

(2)设 A,B,C 三个社区的居民人数分别为 $3a,3a,4a$，

则 A 社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 $3a\times20\%=0.6a$，

B 社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 $3a\times30\%=0.9a$，

C 社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 $4a\times50\%=2a$，………………………………… 6 分

所以 $P=\dfrac{0.6a+0.9a+2a}{3a+3a+4a}=0.35$，故从这 3 个社区中随机抽取 1 名居民且每周运动总时间

超过 5 小时的概率 $P=0.35$. ………………………………………………………………… 8 分

(3)因为 $X\sim N(4,\sigma^2)$，所以 $P(X>4)=0.5$. ……………………………………………… 9 分

因为 $P(X>5)=0.35$，所以 $P(4<X<5)=0.5-0.35=0.15$，

所以 $P(3<X<5)=2P(4<X<5)=0.3$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)设热身赛中甲队获胜为事件 A，则 A 包含胜胜、胜负胜、负胜胜三种情况，…… 1 分

所以 $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$. ……………………………………………… 4 分

(2)甲队进入决赛的概率为$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$；乙队进入决赛的概率为$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$；

丙队进入决赛的概率为$\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$. ……………………………………………………………… 6 分

X 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{3}{5})(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{15}$；

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{3}{5})\times\frac{2}{3}$

$=\frac{3}{10}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times(1-\frac{3}{5})\times\frac{2}{3}+(1-\frac{1}{2})\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{30}$；

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$. …………………………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(X)=\frac{3}{10}+\frac{13}{15}+\frac{3}{5}=\frac{53}{30}$. ……………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：因为 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-x$，所以 $f'(x)=\frac{a}{x}+x-1=\frac{x^2-x+a}{x^2}$. …………… 1 分

当 $\Delta=1-4a\leqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{1}{4}$时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；………

……………………………………………………………………………………… 2 分

当 $0<a<\frac{1}{4}$时，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})\cup(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$，令 $f'(x)<0$，

得 $x\in(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$，所以 $f(x)$在$(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2})$，$(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$上单调递增，在$(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$上单调递减；……………………………………… 3 分

当 $a\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x\in(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty)$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2})$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$ 上单调递减. ……… 5 分

(2)证明：由 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{e^{x_1-1}-e^{x_2-1}}=1$，得 $\frac{a\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-x_1-a\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2+x_2}{e^{x_1-1}-e^{x_2-1}}=1$，

整理得 $a=\frac{e^{x_1-1}-\frac{1}{2}x_1^2+x_1-e^{x_2-1}+\frac{1}{2}x_2^2-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$.

因为 $x_1>x_2>0$，所以 $\ln x_1>\ln x_2$.

要证 $x_1x_2<e^{\frac{2a}{e}}$，即证 $\ln x_1+\ln x_2<\frac{2a}{e}$，即 $2a>e(\ln x_1+\ln x_2)$，

只要证 $e^{x_1-1}-\frac{1}{2}x_1^2+x_1-\frac{e}{2}(\ln x_1)^2>e^{x_2-1}-\frac{1}{2}x_2^2+x_2-\frac{e}{2}(\ln x_2)^2$. ……………… 7 分

令 $g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{e}{2}(\ln x)^2$，则只需证 $g(x_1)>g(x_2)$，

即证 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，只要证 $g'(x)=e^{x-1}-x+1-\frac{e\ln x}{x}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即证 $e^{x-1}-x+1\geqslant\frac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ……………………………… 9 分

令 $\varphi(x)=e^{x-1}-x+1$，则 $\varphi'(x)=e^{x-1}-1$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减.

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=1$. ……………………………………………………… 10 分

令 $h(x)=\frac{e\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{x^2}$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(e)=1$， ……………………………………………………… 11 分

所以 $e^{x-1}-x+1\geqslant 1\geqslant\frac{e\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $x_1x_2<e^{\frac{2a}{e}}$. ………………………… 12 分