2023年甘肃省第二次高考诊断考试

文科数学试题答案及评分参考

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A　2. D　3. B　4. D　5. C　6. D　7. C　8. C　9. B　10. D　11. A　12. A

11. 解：因为以 AB 为直径的圆过点 N，所以 $NA\perp NB$，取 AB 的中点 M，

则 $NM=\frac{1}{2}AB$，设抛物线的准线为 l，则 $l:x=-1$，过 A 作 $AA_1\perp l$，垂足为 A_1，过 B 作 $BB_1\perp l$，垂足为 B_1，由抛物线的定义知 $AB=AA_1+BB_1$，所以 $NM=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)$，得 NM 为直角梯形 AA_1B_1B 的中位线，则 $NM\perp y$ 轴，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，又因为 $N(-1,2)$，所以 $y_M=2$，即 $y_1+y_2=4$.

A、B 两点在抛物线上，所以 $y_1{}^2=4x_1$，① $y_2{}^2=4x_2$，②

①－②得：$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)$，$k_{AB}=\frac{4}{y_1+y_2}=1$，

所以 $l_{AB}:x-y-1=0$，$M(3,2)$，$AB=2MN=8$，故选 A.

12. 解：可知 $0<\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}<a=\cos\frac{2\pi}{7}<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，

对于函数 $f(x)=xe^x$，

由于 $f'(x)=(x+1)e^x$，所以当 $x>-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

所以 $f(\frac{1}{2})<f(a)<f(\frac{\sqrt{2}}{2})<f(1)$，即 $\frac{\sqrt{e}}{2}<ae^a<\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{e})^{\sqrt{2}}<e$，

故 $\frac{\sqrt{e}}{2}<ae^a$，A 正确；$a<e^{1-a}$，B 错误；$\frac{1}{2a}<e^{a-\frac{1}{2}}$，C 错误；$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{e})^{\sqrt{2}}>ae^a$，D 错误.

故选 A.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 2080　　14. $y=\pm\sqrt{2}x$　　15. 6　　16. $21n-19$　$\frac{2023}{4050}$

16. 解：可知 $\{c_n\}$ 是首项为2，公差为21的等差数列，故其通项公式为 $c_n=21n-19$，

所以 $d_n=n+1$，$\frac{1}{d_nd_{n+1}}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，$S_{2\,023}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}$，

$S_{2\,023}=\frac{2023}{4050}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17. 解：（1）若选①$a^2-b^2+c^2=2$，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，整理得 $ac\cos B=1$，则

$\cos B>0$，又$\sin B=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos B=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$ac=\dfrac{1}{\cos B}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$；

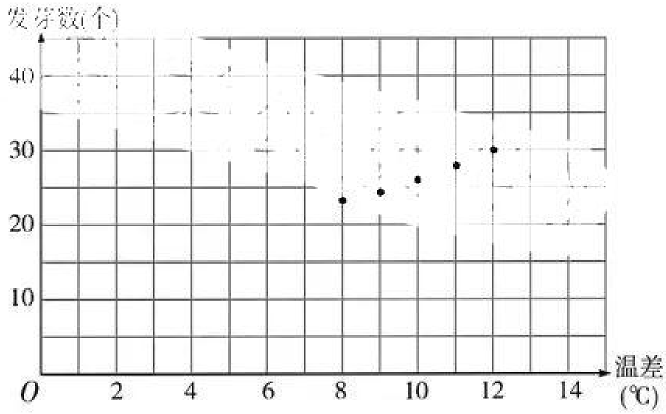
若选②$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-1<0$，则 $\cos B>0$，又 $\sin B=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos B=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-ac\cos B$，得$ac=\dfrac{1}{\cos B}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. ……………… 6 分

（2）由正弦定理得：$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，则 $\dfrac{b^2}{\sin^2 B}=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{ac}{\sin A\sin C}=\dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{9}{4}$，

则 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}\sin B=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………… 12 分

18. 解：（1）由于五个点明显分布在某条直线的附近，因此由散点图要以判断 y 与 x 有明显的线性相关关系. ……… 3 分



（2）设直线的方程为 $y-26=k(x-10)$，

即 $y=k(x-10)+26$，

则五个 x 值对应的直线 l 上的纵坐标分别为

$-2k+26$，$-k+26$，26，$k+26$，$2k+26$，

若设观察值与纵坐标差的平方和为 D，则

$D=(-2k+3)^2+(-k+2)^2+(k-1)^2+(2k-4)^2=10k^2-34k+30=10\left(k-\dfrac{17}{10}\right)^2+\dfrac{11}{10}$，

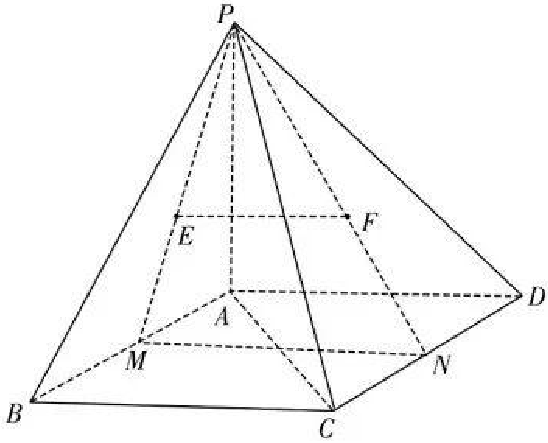
所以当 $k=\dfrac{17}{10}$时 D 取最小值，此时直线 l 的方程为 $y=\dfrac{17}{10}x+9$. ……………………… 9 分

（3）可预测当温度差为 15°C 时，蔬菜种子发芽的个数约为 35.（此处回答 34 也可） ……
…………………………………………………………………………………… 12 分

19.(1)证明:延长 PE 交 AB 于 M,延长 PF 交 CD 于 N,

因为 E,F 分别为$\triangle PAB$ 和$\triangle PCD$ 的重心,

所以 M,N 分别为 AB,CD 的中点,且$\frac{PE}{PM}=\frac{PF}{PN}=\frac{2}{3}$,



又因为底面 $ABCD$ 为平行四边形,

所以 $MN /\!/ BC /\!/ EF$,

又因为 $BC\subset$平面 PBC,$EF\not\subset$平面 PBC,

所以 $EF /\!/$平面 PBC. ………………………… 6 分

(2)因为$\frac{PE}{PM}=\frac{PF}{PN}=\frac{2}{3}$,若设 E 到平面 PCD 的距离为 h_1,M 到平面 PCD 的距离 h_2,则 $h_1=\frac{2}{3}h_2$,因为 M 在棱 AB 上,且 AB 平行于平面 PCD,

所以 M 到平面 PCD 的距离 h_2 等于 A 到平面 PCD 的距离,

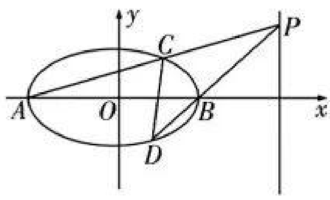
连接 AN,因为 $PD\perp AC$,可知平面 $PAN\perp$平面 PCD 交线为 PN ,

过 A 作 PN 的垂线,垂足为 H,且由等面积法知 $AH=\frac{PA\cdot AN}{PN}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以 $h_2=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 E 到平面 PCD 的距离为 $h_1=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$. …………… 12 分

20.(1)由已知得:$a=2$,$A(-2,0)$,$B(2,0)$,

设 $M(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$,因为 M 在椭圆上,所以 $b^2x_0^2+4y_0^2=4b^2$①



因为 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$,

将①式代入,得 $4b^2-b^2x_0^2=12-3x_0^2$,得 $b^2=3$,

所以椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 4 分

(2)①设 $P(4,t)(t\neq0)$,

则 $k_{PA}=\frac{t}{6}$,$l_{PA}:x=\frac{6}{t}y-2$,同理可得 $k_{PB}=\frac{t}{2}$,$l_{PB}:x=\frac{2}{t}y+2$,

联立方程$\begin{cases}x=\frac{6}{t}y-2\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$,得 $y_C=\frac{18t}{27+t^2}$,$x_C=\frac{54-2t^2}{27+t^2}$,

则 $C(\frac{54-2t^2}{27+t^2},\frac{18t}{27+t^2})$. 同理可得 $D(\frac{2t^2-6}{3+t^2},\frac{-6t}{3+t^2})$,

椭圆的右焦点为 $F_1(1,0)$，$\overrightarrow{F_1C}=(\frac{27-3t^2}{27+t^2},\frac{18t}{27+t^2})$，$\overrightarrow{F_1D}=(\frac{t^2-9}{3+t^2},\frac{-6t}{3+t^2})$，

因为 $\frac{27-3t^2}{27+t^2}\times\frac{-6t}{3+t^2}-\frac{18t}{27+t^2}\times\frac{t^2-9}{3+t^2}=0$，

说明 C,D,F_1 三点共线，即直线 CD 恒过 F_1 点. ………………………………………… 10 分

②周长为定值. 因为直线 CD 恒过 F_1 点，所以 $C_{\triangle CFD}=4a=8$. ……………………………… 12 分

21. 解：(1) 当 $a=4$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}+4\ln x$，则 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}=\frac{4x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,\frac{1}{4})$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上单调递减；

当 $x\in(\frac{1}{4},+\infty)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{4})=4(1-\ln 4)<0$，

又 $f(\frac{1}{e^3})=e^3-12>0$，$f(1)=1<0$，所以存在 $x_1\in(0,\frac{1}{4})$，$x_2\in(\frac{1}{4},+\infty)$，

使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，即 $f(x)$ 的零点个数为 2. ………………………………………… 4 分

(2) 函数 $g(x)=f(x)+\frac{x^2-2x-1}{x^2+x}=a\ln x+\frac{x-1}{x+1}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$g'(x)=\frac{a}{x}+\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+(2a+2)x+a}{x(x+1)^2}$，

当 $a\geqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，令 $h(x)=ax^2+(2a+2)x+a$，由于 $\Delta=(2a+2)^2-4a^2=4(2a+1)$，

①当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$\Delta=0$，$g'(x)=\frac{-\frac{1}{2}(x-1)^2}{x(x+1)^2}\leqslant 0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$\Delta<0$，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$\Delta>0$，设 x_1,x_2 是方程 $h(x)=0$ 的两个根，且 $x_1<x_2$，则

$x_1=\frac{-(a+1)+\sqrt{2a+1}}{a}$，$x_2=\frac{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}{a}$，

由 $x_1=\frac{(a+1)-\sqrt{2a+1}}{-a}=\frac{\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{2a+1}}{-a}>0$，

所以当 $x\in(0,x_1)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递增；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，

综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在

$(0,+\infty)$上单调递减；当$-\frac{1}{2}<a<0$时，函数$g(x)$在$\left(0,\frac{-(a+1)+\sqrt{2a+1}}{a}\right)$，

$\left(\frac{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}{a},+\infty\right)$上单调递减，在$\left(\frac{-(a+1)+\sqrt{2a+1}}{a},\frac{-(a+1)-\sqrt{2a+1}}{a}\right)$

上单调递增. ………………………………………………………………………………… 12 分

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分，不涂，多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分.

22. 解：(1)由曲线 C_1 的参数方程$\begin{cases}x=-2+2\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数，且 $\alpha\in[0,\pi]$)可知

曲线 C_1 是以$(-2,0)$为圆心，2 为半径的圆在 x 轴及上方的部分.

故曲线 C_1 的极坐标方程：$\rho=-4\cos\theta,\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，

又因为点 P 为曲线 C_1 上任意一点，将点 P 绕坐标原点顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到点 Q，

设点 $Q(\rho,\theta)$，则点 $P\left(\rho,\theta+\frac{\pi}{2}\right)$，代入曲线 C_1 得到$\rho=-4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\theta$，

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ………………………………… 5 分

(2)因为直线 $l:\sqrt{3}x-y-1=0$ 经过点 $F(0,-1)$，

故设过 $F(0,-1)$的直线$\sqrt{3}x-y+1=0$ 的参数方程为：$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\ y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)，

代入曲线 C_2 的普通方程：$x^2+(y-2)^2=4,x\in[0,2]$，得：$t^2-3\sqrt{3}t+5=0$，

此方程的两个根 t_1,t_2 为 A,B 两点对应的参数，则 $t_1+t_2=3\sqrt{3},t_1t_2=5$，所以 $t_1>0,t_2>0$，

所以$|FA|+|FB|=t_1+t_2=3\sqrt{3}$. ……………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)函数解析式可化为$f(x)=\begin{cases}3x,x\geq\frac{1}{2},\\ 2-x,-1\leq x<\frac{1}{2},\\ -3x,x<-1,\end{cases}$

由 $3x\leq3$，得 $x\leq1$，因此，$\frac{1}{2}\leq x\leq1$；

由 $2-x\leq3$，得 $x\geq-1$，因此，$-1\leq x<\frac{1}{2}$；

由 $-3x\leq3$，得 $x\geq-1$，此时，无解，

综上可知原不等式的解集是$\{x|-1\leq x\leq 1\}$. ………………………………………… 5 分

(2)$\because 0<b<\frac{1}{2}<a$,$\therefore f(a)=3a$,$f(b)=2-b$,

$\because f(a)=3f(b)$,$\therefore a+b=2$,

$\therefore a^2+b^2=a^2+(2-a)^2=2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2$,

$\because 0<b<\frac{1}{2}<a$,$\therefore \frac{3}{2}<a<2$,

$\therefore a^2+b^2=2(a-1)^2+2>\frac{5}{2}$,

$\because m\in\mathbf{Z}$,

$\therefore m$ 的最大值为 2. ………………………………………………………… 10 分