柳州高中／南宁三中高三(4 月)联考

理科数学参考答案

一、(60 分)

1. A($P=\{-2,-1,0,1,2\}$,所以 $P\cap Q=\{0,1,2\}$.

故应选 A.)

2. A($(1+2\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$,所以 $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{5}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{5}$,所以复数 z 的共轭复数在复平面内对应的点所在的象限为第一象限.

故应选 A.)

3. B(由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,得 $\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=0$,所以 $\sin x=0$ 或 $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$,

若 $\sin x=0$,则 $\cos 2x=1-2\sin^2 x=1$;

若 $\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$,得 $\tan x=-\sqrt{3}$,所以 $\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\dfrac{1}{2}$,

综上,$\cos 2x$ 的值为 1 或 $-\dfrac{1}{2}$.

故应选 B.)

4. C(由三视图知,该多面体为三棱台,体积为 $\dfrac{1}{3}\times 2\times(1+2+4)=\dfrac{14}{3}$.

故应选 C.)

5. A(设 $A=$"取到男性志愿者",$P(A)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{13}{24}$,

故应选 A.)

6. C($\because a>0,b>0$,

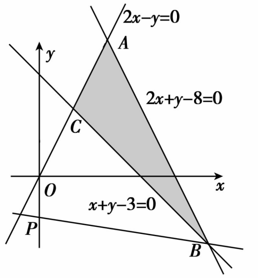
$\therefore \dfrac{b}{a^2}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{a}{2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a^2}\cdot\dfrac{4}{b}}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{4}{a}+\dfrac{a}{2}\geqslant 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $2a=b=4\sqrt{2}$ 时等号成立,

$\dfrac{b}{a^2}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{a}{2}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

故应选 C.)

7. B(作出可行域,如图 $\triangle ABC$ 内部(含边界),



由 $\begin{cases}2x+y-8=0\\x+y-3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$,即 $B(5,-2)$,

直线 $kx-y+1=0$ 过定点 $P(0,-1)$,k 表示可行域内点 (x,y) 与定点 P 连线的斜率,由图可知其最小值为 $k_{PB}=\dfrac{-2+1}{5-0}=-\dfrac{1}{5}$.

故应选 B.)

8. A(因为偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

$a=f(\log_2\dfrac{1}{6})=f(\log_2 6)$,$b=f(\log_2 4.9)$,$c=f(2^{0.8})$,

又 $\log_2 6>\log_2 4.9>\log_2 4=2>2^{0.8}$,则 $c<b<a$.

故应选 A.)

9. C(对于 A,$B=60^\circ$,$b=4$,$A=\dfrac{\pi}{4}$,由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$

所以 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$,故 A 正确;

对于 B,由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$,所以

$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{\dfrac{9}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{4}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}<1$,

因为 $a>b \Rightarrow A>B$，A 有两个解，

所以该三角形有两解，故 B 正确；

对于 C，由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$16=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac \geqslant (a+c)^2-\frac{3}{4}(a+c)^2=\frac{1}{4}(a+c)^2$，

所以 $a+c \leqslant 8$，当且仅当 $a=c$ 时取等号，此时三角形周长最大为等边三角形，周长为 12，故 C 错；

对于 D，由 $\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $a=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin A$，$c=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin C$，

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{64}{3}\sin A\sin C$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin A\sin(120^\circ-A)$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\sin A(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A)$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}[\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}(1-\cos 2A)]$

$=\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\cos(2A+60^\circ)]$

$=\frac{8\sqrt{3}}{3}[\cos(2A-120^\circ)+\frac{1}{2}]$

由于 $A\in(0^\circ,120^\circ)$，$2A-120^\circ\in(-120^\circ,120^\circ)$，$\cos(2A-120^\circ)\in(-\frac{1}{2},1]$，

无最小值，

所以 $\triangle ABC$ 面积无最小值，有最大值为 $4\sqrt{3}$，故 D 正确.

故应选 C.）

10. A（因为数学成绩服从正态分布，

其密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-110)^2}{200}}$，$x\in\mathbf{R}$，

所以 $\mu=110$，$2\sigma^2=200$，即 $\sigma=10$.

所以这次考试的平均成绩为 110，标准差为 10，故 A 错误；

因为二部数学成绩 $\xi\sim N(115,56.25)$，$\sigma=7.5$，对称轴为 $x=115$，

所以分数在 100 到 122.5 分之间的概率为 0.8185，所以人数约为 614 人，故 B 正确；

一部数学成绩 $x\sim N(110,10^2)$，二部数学成绩 $\xi\sim N(115,7.5^2)$，所以分数在 130 分以上的人数大致相同，故 C 正确.

易知 $115>110$，故 D 正确，

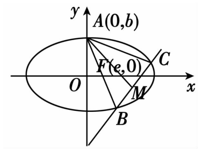
故应选 A.）

11. B（因为 $BC=1$，$CP=2$，所以 $BP=\sqrt{5}$，又因为 $AB=3$，$AP=\sqrt{14}$，所以可知 $AB\perp BP$，$BC\cap BP=B$，故 $AB\perp$ 平面 BCP，所以 $AB\perp CP$ 且 $CP\perp$ 平面 ABC，可知此三棱锥为长方体的一部分，其外接球的直径为 $\sqrt{14}$，故体积为 $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$，

故应选 B.）

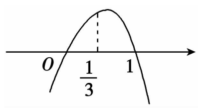
12. A（设弦 BC 中点为 $M(x,y)$，$\overrightarrow{AF}=(c,-b)$，$\overrightarrow{FM}=(x-c,y)$，

由 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FM}$ 知



$\begin{cases}c=2(x-c),\\-b=2y,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3c}{2},\\y=-\frac{b}{2},\end{cases}$

$\therefore M(\frac{3c}{2},-\frac{b}{2})$ 在椭圆内部 $\therefore \frac{\frac{9c^2}{4}}{a^2}+\frac{\frac{b^2}{4}}{b^2}<1\Rightarrow\frac{9}{4}e^2<\frac{3}{4}\Rightarrow e^2<\frac{1}{3}$，



易知 $k_{OM}\cdot k_{BC}=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{\frac{b}{2}}{\frac{3}{2}c}\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{b}{3c}\cdot k=\frac{b^2}{a^2}$，

$\therefore k=\frac{3bc}{a^2}>0$，

$k=3\sqrt{\frac{b^2c^2}{a^4}}=3\sqrt{\frac{(a^2-c^2)c^2}{a^4}}=3\sqrt{(1-e^2)e^2}<3\sqrt{(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{3}}=\sqrt{2}$.）

故应选 A.）

二、（20 分）

13. 7 或 8 或 9（二项展开式性质易得 n 的值可以为 7，8，9. 填写一个即可.）

14. $0<r\leqslant 1$（设小球圆心 $(0,y_0)$，

抛物线上点(x,y)，

点到圆心距离平方

$r^2=x^2+(y-y_0)^2=2y+(y-y_0)^2=y^2+2(1-y_0)y+{y_0}^2$

若 r^2 最小值在$(0,1)$时取到，则小球触及杯底，

此二次函数对称轴在 y 轴左边，

所以 $1-y_0\geqslant 0$，

所以 $0<y_0\leqslant 1$，

所以 $0<r\leqslant 1$，

故答案为 $0<r\leqslant 1$.）

15. $\frac{7}{6}<a<\frac{8}{3}$（由题意知，$f'(x)=\frac{1}{3}x^2+2x-2a$ 在$(1,2)$上有变号零点，又易知 $f'(x)=\frac{1}{3}x^2+2x-2a$ 在$(1,2)$上单调递增，故 $f'(x)\in(\frac{7}{3}-2a,\frac{16}{3}-2a)$，

可得$\begin{cases}\frac{7}{3}-2a<0\\ \frac{16}{3}-2a>0\end{cases}$，解得$\frac{7}{6}<a<\frac{8}{3}$.）

16. $(0,\frac{2}{e})$（定义域$(0,+\infty)$$(x^2+\frac{1}{x^2})\ln x=\frac{a}{4}(e^{ax^2}+1)$.

$4(x^4+1)\ln x=ax^2(e^{ax^2}+1)$，

$(x^4+1)\ln x^4=ax^2(e^{ax^2}+1)$，

$\ln x^4(e^{\ln x^4}+1)=ax^2(e^{ax^2}+1)$，

令 $g(x)=x(e^x+1)$，$g'(x)=e^x+1+x\cdot e^x>0$，

$\therefore g(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(\ln x^4)=g(ax^2)$，

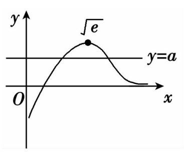
$\therefore \ln x^4=ax^2\Rightarrow a=\frac{4\ln x}{x^2}$，

令 $\varphi(x)=\frac{4\ln x}{x^2}$，

$\therefore \varphi'(x)=4\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-2x\ln x}{x^4}=4\,\frac{1-2\ln x}{x^3}$，

$1-2\ln x=0$，$x=\sqrt{e}$，

又 $x>1$，$\varphi(x)>0$.



$\varphi(\sqrt{e})=\frac{4\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2}=\frac{2}{e}$，

$\therefore a\in(0,\frac{2}{e})$.）

三、（70 分）

17.（1）证明：由$\frac{2S_n}{n}=a_n+2$，得 $2S_n=na_n+2n$①，

所以 $2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}+2(n+1)$②，

………………………………………… 2 分

两式 ②－① 得 $2a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n+2$，所以$(n-1)a_{n+1}-na_n+2=0$③，

当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+2=0$④，………………………………… 4 分

③－④ 得$(n-1)a_{n+1}-2(n-1)a_n+(n-1)a_{n-1}=0$，

即 $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$，所以$\{a_n\}$是等差数列.

………………………………………………… 6 分

（2）在$\frac{2S_n}{n}=a_n+2$ 中，令 $n=1$ 得$\frac{2a_1}{1}=a_1+2$ 所以 $a_1=2$，因为 $a_2=5$，所以$\{a_n\}$的公差 $d=a_2-a_1=3$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 3=3n-1$ ………………………… 8 分

$c_n=(3n-1)\cdot 2^{n-1}$，.

所以 $T_n=2+5\times 2^1+8\times 2^2+\cdots+(3n-1)\times 2^{n-1}$，

$2T_n=2\times 2^1+5\times 2^2+8\times 2^3+\cdots+(3n-1)\times 2^n$，

两式相减得：$-T_n=2+3(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-(3n-1)\times 2^n$

$=2+3\times\frac{2}{2-1}(2^{n-1}-1)-(3n-1)\times 2^n$

$=-4+(4-3n)\times 2^n$，

所以 $T_n=4+(3n-4)\times 2^n$.　…… 12 分

18.（1）由已知可得：$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{640+540+420+300+200}{5}=\frac{2100}{5}=420$，………………………………… 2 分

又因为$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=5180$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\dfrac{5180-6300}{55-5\times 3^2}$

$=-\dfrac{1120}{10}=-112$， 4 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=420+112\times 3=756$，

所以 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=-112x+756$，

当 $y=-112x+756<100(x\in\mathbf{N}^*)$ 时，解得：$x\geqslant 6$，

可以预测从第 6 月份开始该大学体重超重的人数降至 100 人以下. …………………… 6 分

(2)X 的可能取值为 2，3，4， ………… 7 分

$P(X=2)=(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{9}{25}$，

$P(X=3)=C_2^1\times\dfrac{2}{5}\times(\dfrac{3}{5})^2+(\dfrac{2}{5})^3=\dfrac{44}{125}$，

$P(X=4)=C_3^1\times(\dfrac{2}{5})^2\times(\dfrac{3}{5})^2+C_3^2\times(\dfrac{2}{5})^3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{180}{625}$，

所以 X 的分布列如下：

X	2	3	4
P	$\dfrac{9}{25}$	$\dfrac{44}{125}$	$\dfrac{180}{625}$

……………………………………………………… 11 分

故 $E(X)=2\times\dfrac{9}{25}+3\times\dfrac{44}{125}+4\times\dfrac{180}{625}=\dfrac{366}{125}$. ………………………………………… 12 分

19. (1)∵$ABCD$ 为矩形，∴$BC\perp CD$， …………………………………………………… 1 分

∵ 平面 $CDE\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $CDE\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

∴$BC\perp$ 平面 CDE，

而 $DE\subset$ 平面 CDE，

∴$DE\perp BC$， ………………………………… 2 分

∵ 点 E 在半圆 O 上，CD 为直径，

∴$DE\perp EC$，

又 $BC\cap EC=C$，

∴$DE\perp$ 平面 BCE， ………………… 3 分

而 $DE\subset$ 平面 ADE，

∴ 平面 $ADE\perp$ 平面 BCE. ………… 4 分

(2)∵$ABCD$ 为矩形，∴$AD\parallel BC$，

∴$\angle EAD$ 即为异面直线 AE 与 BC 所成角，

即 $\cos\angle EAD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

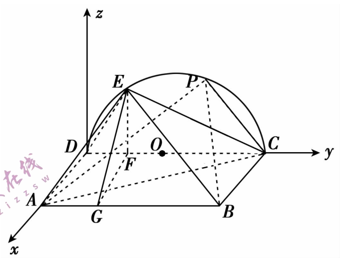
由(1)易得 $DE\perp AD$，

设 $CD=b$，则 $DE=\dfrac{1}{2}b$，

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$\cos\angle EAD=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+\dfrac{1}{4}b^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

得 $b=4$，即 $CD=4$，∴$OP=2$，…… 6 分

以点 D 为原点，DA，DC 所在直线为 x 轴，y 轴建立空间直角坐标系如图，设 $\angle POC=\theta$，



则 $A(1,0,0)$，$B(1,4,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,2+2\cos\theta,2\sin\theta)$.

∴ $\overrightarrow{PC}=(0,2-2\cos\theta,-2\sin\theta)$，$\overrightarrow{CA}=(1,-4,0)$，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$ …………………… 7 分

设平面 PAC 的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=(2-2\cos\theta)y_1-2\sin\theta\cdot z_1=0$，

$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=x_1-4y_1=0$，

令 $y_1=1$，则 $x_1=4$，$z_1=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$.

∴ $\boldsymbol{m}=(4,1,\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta})$. ………… 8 分

设平面 PBC 的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=(2-2\cos\theta)y_2-2\sin\theta\cdot z_2=0$

$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=x_2=0$，

令 $y_2=1$，则 $z_2=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，$x_2=0$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(0,1,\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta})$， …………… 10 分

$\therefore \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=$

$$\frac{1+(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta})^2}{\sqrt{17+(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta})^2}\sqrt{1+(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta})^2}}=\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

解得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 或 $\cos\theta=1$（舍去）

$\therefore \theta=60°$，…………………………… 11 分

$\therefore \triangle OPC$ 为等边三角形，$\therefore PC=2$.

$\therefore$ 存在点 P，使得二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$，这时，$PC=2$. ………………… 12 分

20.（1）函数 $f(x)$ 定义域为 $(-1,+\infty)$，

………………………………………… 1 分

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}(x>-1)$，

………………………………………… 2 分

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增；在 $(0,+\infty)$ 单调递减 ………………………………… 4 分

（2）因为 $\frac{kx^2}{e^x-1}-x\leqslant f(x)$，$x>0$，

即 $\frac{kx}{e^x-1}\leqslant\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}$，……

………………………………………… 6 分

令 $g(x)=\frac{x}{e^x-1}(x>0)$，

$g'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}(x>0)$，…… 7 分

令 $h(x)=(1-x)e^x-1$，$h'(x)=-xe^x<0$，………………………………………………… 8 分

$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$h(x)<h(0)=0$，所以 $g'(x)<0$，

$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，且 $g(x)>0$，

………………………………………… 9 分

由（1）知当 $x>0$ 时，$x>\ln(x+1)$，$\frac{x}{e^x-1}\leqslant\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}$，且 $\frac{x}{e^x-1}>0$，

所以 $\frac{kx}{e^x-1}\leqslant\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}$，$k\leqslant\dfrac{\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}}{\frac{x}{e^x-1}}$，而 $\dfrac{\frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)}-1}}{\frac{x}{e^x-1}}>1$，

所以 $k\leqslant1$，……………………………… 11 分

即 k 的最大值为 1. ………………………… 12 分

21.（1）设双曲线 C 的半焦距为 c，依题意，$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，即有 $c=\sqrt{3}a$，$b=\sqrt{2}a$，…………… 1 分

圆 O：$x^2+y^2=2$ 交 x 轴于点 $A(\sqrt{2},0)$，则圆 O 在点 A 处的切线 $x=\sqrt{2}$ 被双曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$，………………………………… 2 分

由双曲线的对称性知被截弦的端点 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 在双曲线 C 上，

因此 $\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1$，而 $b=\sqrt{2}a$，解得 $a^2=1$，$b^2=2$，……………………………………………… 4 分

所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. ……

………………………………………… 5 分

（2）当圆 O 在点 P 处切线斜率不存在时，点 $P(\sqrt{2},0)$ 或 $P(-\sqrt{2},0)$，切线方程为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$，

由（1）及已知，得 $|PM|=|PN|=\sqrt{2}$，则有 $|PM|\cdot|PN|=2$，……………………… 6 分

当圆 O 在点 P 处切线斜率存在时，设切线方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则有 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即 $m^2=2(k^2+1)$，由 $\begin{cases}y=kx+m\\2x^2-y^2=2\end{cases}$ 消去 y 得：

$(k^2-2)x^2+2kmx+m^2+2=0$，显然 $\begin{cases}k^2-2\neq0\\\Delta=4k^2m^2-4(k^2-2)(m^2+2)=8k^2+32>0\end{cases}$，

$x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2-2}$，$x_1x_2=\frac{m^2+2}{k^2-2}$，而 $\overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{ON}=(x_2,y_2)$，………………… 9 分

则 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(k^2+1)\cdot\frac{m^2+2}{k^2-2}+km\cdot\frac{-2km}{k^2-2}+m^2=$

$\frac{m^2+2k^2+2-k^2m^2}{k^2-2}+m^2=\frac{(2-k^2)m^2}{k^2-2}+m^2=0$，…………………………………………… 11 分

因此 $OM\perp ON$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OMN$ 中，$OP\perp MN$ 于点 P，则 $|PM|\cdot|PN|=|OP|^2=2$，

综上得 $|PM|\cdot|PN|$ 为定值 2. ……………………………………………………… 12 分

22. (1) ∴ 曲线 C_1 的普通方程为 $C_1: x^2+\frac{y^2}{3}=1$，

所以曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$ (α 为参数)，…………………………………… 2 分

把 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入 $\rho=2\cos\theta+4\sin\theta$，$\rho^2=2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta$，

得到曲线 C_2 的极坐标方程 $(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta-2)^2=5$，

化简的曲线 C_2 的普通方程为：$C_2:(x-1)^2+(y-2)^2=5$；…………………………………… 5 分

(2) 依题意设 $M(\rho_1,\frac{\pi}{4})$，$N(\rho_2,\frac{\pi}{4})$，

∵ 曲线 C_1 的极坐标方程为 $3(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=3$，

将 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho>0)$ 代入曲线 C_1 的极坐标方程，

得 $3(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho)^2+(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho)^2=3$，

解得 $\rho_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，…………………………………… 7 分

同理，将 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho>0)$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程 $\rho=2\cos\theta+4\sin\theta$，

得 $\rho_2=3\sqrt{2}$，…………………………………… 9 分

∴ $|MN|=|\rho_1-\rho_2|=3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………………… 10 分

23. (1) 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=|x-2|+3|x|=(2-x)-3x=2-4x$，

由 $f(x)\geqslant 10$，得 $2-4x\geqslant 10$，解得 $x\leqslant -2$；……………………………………………… 2 分

当 $0<x<2$ 时，$f(x)=|x-2|+3|x|=(2-x)+3x=2+2x$，

由 $f(x)\geqslant 10$，得 $2+2x\geqslant 10$，解得 $x\geqslant 4$，此时不等式 $f(x)\geqslant 10$ 无解；…………… 3 分

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=|x-2|+3|x|=(x-2)+3x=4x-2\geqslant 10$，

解得 $x\geqslant 3$；…………………………………… 4 分

综上所述，不等式 $f(x)\geqslant 10$ 的解集为 $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$；…………………………… 5 分

(2) 证明：

由(1) 可知 $f(x)=\begin{cases}2-4x, x\leqslant 0,\\ 2+2x, 0<x<2,\\ 4x-2, x\geqslant 2,\end{cases}$

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 2$；

当 $0<x<2$ 时，$f(x)>2$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\geqslant 6$，

所以函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $m=2$，则 $a+b+c=2$ ……………………………………… 7 分

由柯西不等式可得 $(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$，

即 $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2^2$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4}{3}$，

当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时等号成立，

因此 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{4}{3}$. …………… 10 分