华大新高考联盟2020届高三4月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】D

【命题意图】主要考查复数的概念及相关运算，考查考生的运算求解能力.

【解析】因为 $z=1+\frac{1}{i}=1-i$，$\bar{z}=1+i$，所以 $z\cdot\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$.故选 D.

2.【答案】A

【命题意图】主要考查指数函数和对数函数的单调性、集合子集的概念、充要条件，考查考生的逻辑推理能力.

【解析】$A=\{x|x>3\}$，$B=\{x|x>a+1\}$.当 $a=3$ 时，$B=\{x|x>4\}$.所以 $B\subseteq A$.

当 $B\subseteq A$ 时，即 $a\geqslant 2$，并不能得到 $a=3$.故选 A.

3.【答案】C

【命题意图】主要考查等差数列通项公式及前 n 项和的应用，考查考生的运算求解能力和逻辑推理能力.

【解析】因为 $a_7+a_9=2a_8=30$，所以 $a_8=15$.又 $a_3=5$，所以 $a_1+a_{10}=a_3+a_8=20$.

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{200}{2}=100$.故选 C.

4.【答案】D

【命题意图】主要考查以数学文化为背景的概率问题，考查考生的化归转化能力、数学建模能力和逻辑推理能力.

【解析】因为 $\frac{\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\left(\frac{360^\circ}{12}\right)\cdot 12}{\pi R^2}\approx\frac{96}{100}$，所以 $\pi\approx\frac{25}{8}$.故选 D.

5.【答案】C

【命题意图】主要考查对数函数的性质，考查考生的逻辑推理能力和运算求解能力.

【解析】因为 $x=\lg 2<1$，$y=\ln 3>1$，$z=\log_2 3>1$，所以 x 最小.

又因为 $y=\frac{\lg 3}{\lg e}$，$z=\frac{\lg 3}{\lg 2}$，所以 $y<z$，所以 $x<y<z$.故选 C.

6.【答案】C

【命题意图】主要考查程序框图有关知识、二次函数单调性以及古典概型，考查考生的逻辑推理能力和数形结合能力.

【解析】当 $x=-2\Rightarrow y=0$；$x=-2+1=-1\Rightarrow y=-1$；$x=-1+1=0\Rightarrow y=0$；$x=0+1=1\Rightarrow y=3$；$x=1+1=2\Rightarrow y=8$；$x=2+1=3$，退出循环，

所以 $A=\{0,-1,3,8\}$，

又函数 $f(x)=x^2+mx$ 在$[0,+\infty)$上是增函数，所以 $-\frac{m}{2}\leqslant 0\Rightarrow m\geqslant 0$.

函数 $f(x)=x^2+mx$ 在$[0,+\infty)$上是增函数的概率为 $\frac{3}{4}$，故选 C.

7.【答案】A

【命题意图】主要考查函数的性质与图象，考查考生的化归转化能力和数形结合能力，以及逻辑推理、直观想象和数学运算.

【解析】因为 $f(x)+g(x)=2e^x\cos x$，所以 $f(-x)+g(-x)=2e^{-x}\cos(-x)$，

即$-f(x)+g(x)=2e^{-x}\cos(x)$，所以$f(x)-g(x)=-\dfrac{2\cos x}{e^{x}}$.

因为$y=-\dfrac{2\cos x}{e^{x}}$，当$x=0.01$时，$y<0$，所以C，D错误.

又$y'=\dfrac{2(\sin x+\cos x)}{e^{x}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^{x}}$，所以$x=-\dfrac{\pi}{4}$为极值点，即B错误.故选A.

8.【答案】C

【命题意图】主要考查等比数列有关知识，考查考生的数学抽象、逻辑推理和数学建模能力.

【解析】设每个实验室的装修费用为x万元，设备费为a_n万元($n=1,2,3,\cdots,10$).

则$\begin{cases}a_5-a_2=42,\\a_7-a_4=168,\end{cases}$所以$\begin{cases}a_1q^4-a_1q=42,\\a_1q^6-a_1q^3=168,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\q=2.\end{cases}$故$a_{10}=a_1q^9=1\ 536$.

依题意$x+1\ 536<1\ 700$，即$x<164$.

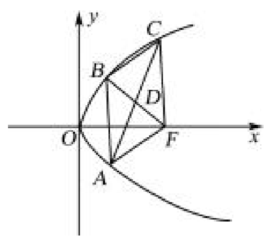
所以总费用为$10x+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10x+\dfrac{3(1-2^{10})}{1-2}=10x+3\ 069\leqslant 4\ 709$.故选C.

9.【答案】B

【命题意图】主要考查抛物线的定义、抛物线的标准方程、直线方程等知识，考查考生的化归转化思想、数形结合思想以及数学运算能力.

【解析】如图所示，设B点的坐标为(x_0,y_0)，则$|BF|=x_0+4=5$，

所以$x_0=1$，B点的坐标为$(1,4)$.



所以线段BF的中点D的坐标为$\left(\dfrac{5}{2},2\right)$.

设$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$.有$y_1^2=16x_1$，$y_2^2=16x_2$，且$\dfrac{y_1+y_2}{2}=2$.

所以$y_1^2-y_2^2=16(x_1-x_2)$，所以$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{16}{y_1+y_2}=4$，所以$k_{AC}=4$.

对角线AC所在的直线方程为AC：$y-2=4\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$，即$4x-y-8=0$.故选B.

10.【答案】C

【命题意图】主要考查三角函数的图象与性质，考查考生的化归与转化能力、数形结合能力，考查逻辑推理与直观想象.

【解析】$f(2)>0\Leftrightarrow 3\sin 2>-2\cos 2\Leftrightarrow \tan 2>-\dfrac{2}{3}$.

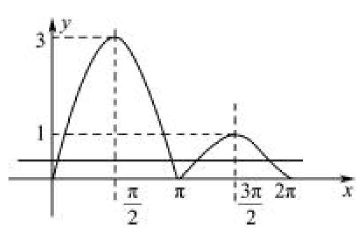
因为$\dfrac{\pi}{2}<2<\dfrac{3\pi}{4}$，所以$\tan 2<\tan\dfrac{3\pi}{4}=-1$，所以$\tan 2<-\dfrac{2}{3}$.故①正确.

设$y=2|\sin x|+\sin x=\begin{cases}3\sin x, & 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\\-\sin x, & 2k\pi+\pi<x<2k\pi+2\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$.

显然$f(x)$是以2π为周期的周期函数.作$y=2|\sin x|+\sin x$，$x\in[0,2\pi]$的图象如图所示.

由图可知$f(x)$的值域为$[2\cos 2,3+2\cos 2]$，即③错误.

由$f(x)$的函数图象可知，$f(x)$在$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上单调递增.又因为$f(x)$是周期为$2\pi$的函数，所以$f(x)$在$\left(-3\pi,-\dfrac{5\pi}{2}\right)$上单调递增，即②正确.



又因为$\dfrac{\pi}{2}<2<\dfrac{2\pi}{3}$，所以$-\dfrac{1}{2}<\cos 2<0$，所以$0<-2\cos 2<1$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2|\sin x|+\sin x=-2\cos 2$.由图象可知 $f(x)$在$[2,2\pi]$内有四个零点.

且$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{\pi}{2}$,$\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{3\pi}{2}$,所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=4\pi$,所以④正确.故选 C.

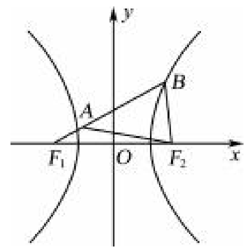
11.【答案】D

【命题意图】主要考查双曲线的定义及几何性质、平面向量的运算,考查考生的运算求解能力、化归转化能力和数形结合能力.

【解析】因为$\overrightarrow{F_1B}=6\overrightarrow{F_1A}$,所以点 F_1,A,B 共线,且$|\overrightarrow{AB}|=5|\overrightarrow{AF_1}|$.

因为$\overrightarrow{AF_2}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF_2}=(\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2B})\cdot\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{AF_2}^2+\overrightarrow{F_2B}\cdot\overrightarrow{AF_2}$,所以$\overrightarrow{F_2B}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$,所以$\overrightarrow{F_2B}\perp\overrightarrow{AF_2}$.

设$|\overrightarrow{AF_1}|=m$,则$|\overrightarrow{AB}|=5m$,由双曲线定义得$\begin{cases}|\overrightarrow{AF_2}|-m=2a,\\ 6m-|\overrightarrow{BF_2}|=2a,\\ |\overrightarrow{AF_2}|^2+|\overrightarrow{BF_2}|^2=25m^2,\end{cases}$



所以$(m+2a)^2+(6m-2a)^2=25m^2 \Rightarrow 3m^2-5ma+2a^2=0 \Rightarrow (m-a)(3m-2a)=0$,

解得 $m=a$ 或 $m=\dfrac{2}{3}a$.

若 $m=a$ 时,$|\overrightarrow{AF_2}|=3a$,$|\overrightarrow{BF_2}|=4a$,因为$|\overrightarrow{AF_2}|<|\overrightarrow{BF_2}|$,故舍去.

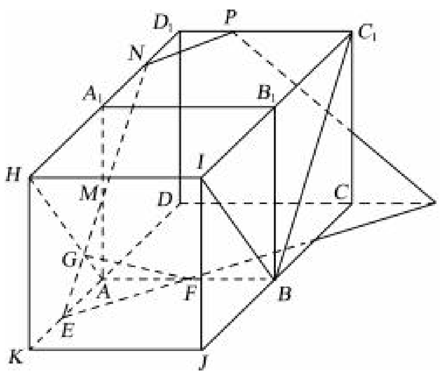
若 $m=\dfrac{2}{3}a$ 时,$|\overrightarrow{AF_2}|=\dfrac{8}{3}a$,$|\overrightarrow{BF_2}|=2a$,$|\overrightarrow{BF_1}|=4a$,$|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{10}{3}a$,$\cos\angle ABF_2=\dfrac{2a}{\frac{10}{3}a}=\dfrac{3}{5}$.

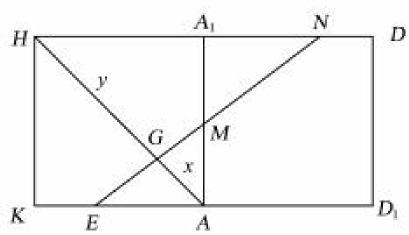
在$\triangle F_1BF_2$ 中,$4c^2=4a^2+16a^2-2\times 2a\times 4a\times\dfrac{3}{5}\Rightarrow\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{13}{5}\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$,故选 D.

12.【答案】A

【命题意图】考查空间线线、线面、面面的平行与垂直关系,考查考生的空间想象能力、化归转化能力和直观想象能力.

【解析】如图,补正方体 $ABJK\text{-}A_1B_1IH$,作平面 MNP 与正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的截面,设 $AB=3$,易知 $AE=AF=2$.





易证 $BC_1\perp BI$,$BC_1\perp AB$,$BI\cap AB=B$,

所以 $BC_1\perp$平面 $ABIH$,即平面 $ABIH$ 为平面α,

所以直线 GF 为 n,直线 HI 为 m,又 $HI/\!/AB$,$\angle AFG$ 为直线 m 与直线 n 所成的角.

设 $AG=x$,$GH=y$,而$\triangle AEG\backsim\triangle HNG$,所以$\begin{cases}x+y=3\sqrt{2},\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{5},\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{6\sqrt{2}}{7}$.

在 Rt△AGF 中，$\tan\angle AFG=\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{\frac{6\sqrt{2}}{7}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{7}$，故选 A.

二、填空题

13.【答案】$\dfrac{15}{4}$.

【命题意图】主要考查二项式定理有关知识，考查考生的运算求解能力.

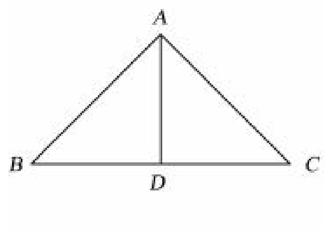
【解析】因为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)^r=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r\cdot C_6^r\cdot x^{6-3r}$，

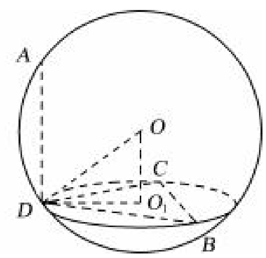
令 $6-3r=0$，所以 $r=2$，$T_3=\dfrac{15}{4}$.

14.【答案】$\dfrac{14\pi}{3}$.

【命题意图】主要考查平面图形折叠中的线面关系以及球的表面积，考查考生的空间想象能力和转化与划化归能力.

【解析】沿 AD 折叠后二面角 B-AD-C 为 $60°$，即折叠后$\angle BDC=60°$，所以△DBC 为等边三角形.





又因为 $AB=2$，所以折叠后 $AD=DB=BC=CD=\sqrt{2}$.
设点 O 为三棱锥 A-BCD 外接球的球心，O_1 为△BDC 的外心.

所以$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 60°}=2DO_1$，所以 $DO_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

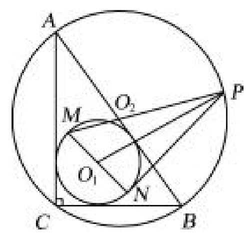
又 $OO_1=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以球心半径 $R^2=DO_1^2+OO_1^2=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{7}{6}$.

所以 $S_{球}=4\pi R^2=\dfrac{14}{3}\pi$.

15.【答案】$\dfrac{13+5\sqrt{5}}{2}$.

【命题意图】主要考查平面向量加、减、数量积的运算，以及三角形内切圆和外接圆有关问题，考查考生的化归与转化能力，逻辑推理和运算求解能力.

【解析】因为△ABC 为直角三角形，



所以内切圆⊙O_1 的半径 $r_1=\dfrac{3+4-5}{2}=1$，

外接圆⊙O_2 的半径 $r_2=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{5}{2}$，

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1M})\cdot(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1N})$

$=\overrightarrow{PO_1}^2+\overrightarrow{PO_1}\cdot(\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{O_1N})+\overrightarrow{O_1M}\cdot\overrightarrow{O_1N}=|\overrightarrow{PO_1}|^2-1$.

又 $|\overrightarrow{O_1O_2}|=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}-1\right)^2+(2-1)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$|\overrightarrow{PO_1}|$的最大值为$\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{5}{2}$，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的最大值为$\frac{13+5\sqrt{5}}{2}$.

16.【答案】$\left[-\ln 2,-\frac{2}{9}\ln 6\right)$.

【命题意图】主要考查函数零点，利用导数分析函数的图象及性质，考查考生化归转化能力、推理运算能力和数形结合能力.

【解析】因为$f(x)=ax^2-ax^2\ln 2x+2\ln 2x-2\ln^2 2x=ax^2(1-\ln 2x)+2\ln 2x(1-\ln 2x)=(1-\ln 2x)(ax^2+2\ln 2x)=0$，$x>0$，

所以$1-\ln 2x=0$ ①或$ax^2+2\ln 2x=0$ ②.

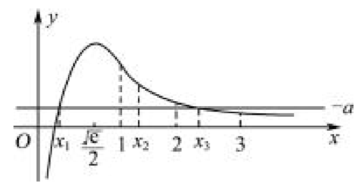
由①得$x=\frac{e}{2}$，由②得$-a=\frac{2\ln 2x}{x^2}$.

令$g(x)=\frac{2\ln 2x}{x^2}$，则$g'(x)=\frac{2(1-2\ln 2x)}{x^3}=0$，所以$x=\frac{\sqrt{e}}{2}$.

当$x\in\left(0,\frac{\sqrt{e}}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

$x\in\left(\frac{\sqrt{e}}{2},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减.

事实上，当$0<x<\frac{1}{2}$时，$g(x)<0$，当$x>1$时，$g(x)>0$.



由图显然$x_1\in(0,1)$，$x_2=\frac{e}{2}\in(1,2)$，所以$[x_1]=0$，$[x_2]=1$，

而$[x_1]+[x_2]+[x_3]=3$，所以$[x_3]=2$，即$x_3\in[2,3)$.

所以$\begin{cases}-a\leqslant g(2),\\-a>g(3),\end{cases}$即$\begin{cases}-a\leqslant\frac{2\ln 4}{4},\\-a>\frac{2\ln 6}{9},\end{cases}$解得$-\ln 2\leqslant a<-\frac{2\ln 6}{9}$.

三、解答题

17.【命题意图】主要考查解三角形、三角恒等变换、等比中项以及均值不等式的应用，考查考生的转化与化归能力和运算求解能力.

【解析】(1)因为$b^2+2\sqrt{3}ac\sin B=a^2+c^2+2ac$，

所以$a^2+c^2-2ac\cos B+2\sqrt{3}ac\sin B=a^2+c^2+2ac$， …………………………… 2分

所以$\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，即$\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$. …………………………… 4分

因为$-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以$B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$， …………………………… 5分

所以$B=\frac{\pi}{3}$. …………………………… 6分

(2)$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$，所以$ac=8$. ………… 7分

因为λ，b，$|a-c|$成等比数列，所以$b^2=|a-c|\lambda$，由于$a-c\neq 0$，所以$\lambda=\frac{b^2}{|a-c|}$. ………… 8分

又$b^2=a^2+c^2-2ac\cos 60^\circ=(a-c)^2+ac=(a-c)^2+8$. …………………………… 9分

所以$\lambda=\frac{b^2}{|a-c|}=\frac{(a-c)^2+8}{|a-c|}=|a-c|+\frac{8}{|a-c|}\geqslant 2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$. …………………… 11分

当且仅当$|a-c|=2\sqrt{2}$时，取"＝".

所以 λ 的最小值为 $4\sqrt{2}$. …………………………………………………………………………… 12 分

18.【命题意图】主要考查空间面面垂直关系，直线与平面所成角的求法，考查考生的空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力.

【解析】(1)连接 A_1C，A_1N，因为四边形 ACC_1A_1 为菱形，$\angle A_1AC=60°$，所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

而点 N 为 AC 中点，所以 $A_1N\perp AC$.

又平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC， …………………………………………………………………… 2 分

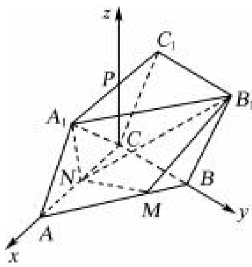
所以 $A_1N\perp$ 平面 ABC，所以 $A_1N\perp BC$. ………………………………………………………… 3 分

而四边形 CBB_1C_1 为正方形，所以 $BC\perp CC_1$.而 $CC_1/\!/A_1A$，所以 $BC\perp A_1A$. ………………… 4 分

又因为 $AA_1\cap A_1N=A_1$，所以 $BC\perp$ 平面 AA_1C_1C. …………………………………………… 5 分

又因为 $BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以平面 $BB_1C_1C\perp$ 平面 ACC_1A_1.……………………………… 6 分

(2)设 A_1C_1 的中点为点 P，以 C 点为坐标原点，分别以向量 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示空间直角坐标系，



则有 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$A_1(1,0,\sqrt{3})$，$N(1,0,0)$.………………………… 7 分

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3},0\right)$，

$\overrightarrow{NA}=(1,0,0)$，所以 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},0\right)$. …………………………… 8 分

又 $\overrightarrow{NA_1}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{NB_1}=\overrightarrow{NA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,2,\sqrt{3})$. ………………………………………………… 9 分

设平面 B_1MN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NB_1}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}y=0,\\ -2x+2y+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

取 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(4,1,2\sqrt{3})$， ……………………………………………………………… 10 分

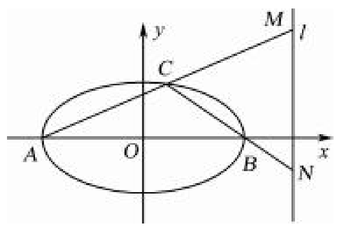
$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-1,0,\sqrt{3})$. ………………………………………………………………… 11 分

设 α 为直线 BB_1 与平面 B_1MN 所成的角，

所以 $\sin\alpha=\left|\dfrac{\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BB_1}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{(-1,0,\sqrt{3})\cdot(4,1,2\sqrt{3})}{\sqrt{16+1+12}\cdot\sqrt{1+3}}\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{29}$，

所以直线 BB_1 与平面 B_1MN 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{29}}{29}$. ………………………………………… 12 分

19.【命题意图】主要考查椭圆的标准方程及几何性质，直线与椭圆的位置关系，正弦定理等知识，考查考生的逻辑推理能力和运算求解能力以及数形结合思想和化归与转化思想等.



【解析】(1)依题意：$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=2\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………………………… 1 分

所以 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 3 分

椭圆 Γ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)设 $C(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$.

直线 AC：$\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{x+2}{x_0+2}$与直线 l：$x=4$ 联立得 $M\left(4,\dfrac{6y_0}{x_0+2}\right)$.

直线 BC：$\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{x-2}{x_0-2}$与直线 l：$x=4$ 联立得 $N\left(4,\dfrac{2y_0}{x_0-2}\right)$.

$|MN|=\left|\dfrac{6y_0}{x_0+2}-\dfrac{2y_0}{x_0-2}\right|=\dfrac{4|y_0|\cdot|x_0-4|}{|x_0^2-4|}$. ………………………………………………………… 6 分

设$\angle ACB=\alpha$，r_1，r_2 分别为$\triangle ABC$ 和$\triangle CMN$ 外接圆的半径，在$\triangle ABC$ 中$\dfrac{|AB|}{\sin\alpha}=2r_1$，所以 $r_1=\dfrac{|AB|}{2\sin\alpha}$.

在$\triangle CMN$ 中$\dfrac{|MN|}{\sin(\pi-\alpha)}=2r_2$，所以 $r_2=\dfrac{|MN|}{2\sin\alpha}$， ………………………………………………………… 7 分

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}=\frac{|MN|^2}{|AB|^2}=\frac{\dfrac{16y_0^2\cdot(x_0-4)^2}{(x_0^2-4)^2}}{16}=\frac{y_0^2(x_0-4)^2}{(x_0^2-4)^2}.$$

又 $y_0^2=\dfrac{3}{4}(4-x_0^2)$，所以$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\dfrac{3}{4}(4-x_0^2)(x_0-4)^2}{(x_0^2-4)^2}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{(4-x_0)^2}{4-x_0^2}$. ………………………………… 9 分

令 $t=4-x_0$，而$-2<x_0<2$，所以 $2<t<6$.

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^2}{4-(t-4)^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{t^2}{-t^2+8t-12}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{-12\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+8\left(\dfrac{1}{t}\right)-1}$$

$=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{-12\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}}$. ……………………………………………………………………… 11 分

所以 $t=3$，即 $x_0=1$ 时，$\dfrac{S_2}{S_1}$取得最小值，最小值为$\dfrac{9}{4}$. ……………………………………………… 12 分

20.【命题意图】主要考查频率分布直方图、古典概型、离散型随机变量分布列、超几何分布等知识，考查考生的数据处理能力、数学建模能力和数学运算能力.

【解析】(1)A 类学生有：$(0.001\,25\times80+0.002\,5\times40)\times100=20$ 人，……………………………… 1 分

B 类学生有：$0.006\,25\times80\times100=50$ 人，……………………………………………………………… 2 分

C 类学生有：$(0.005\times40+0.002\,5\times40)\times100=30$ 人. ………………………………………… 3 分

(2)$A:B:C=20:50:30=2:5:3$，

故从 A 类中抽 2 人，B 类中抽 5 人，C 类中抽 3 人. ………………………………………………… 4 分

设邀请的三人中是 C 类的学生人数为 X，则 X 可取 0，1，2，3.

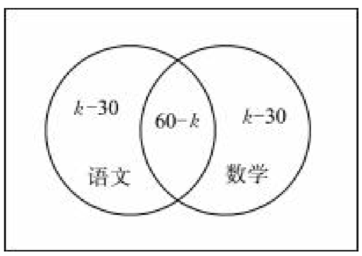
$P(X=0)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$，$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{40}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{40}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$. ……… 6 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{7}{24}$	$\dfrac{21}{40}$	$\dfrac{7}{40}$	$\dfrac{1}{120}$

，所以 $E(X)=0\times\dfrac{7}{24}+1\times\dfrac{21}{40}+2\times\dfrac{7}{40}+3\times\dfrac{1}{120}=\dfrac{9}{10}$. …… 7 分

(3)学生随机独立参加语文或数学在线辅导所包含的基本事件总数为$(C_{50}^{30})^2$，…………………………………………………………………… 8 分



当 $\xi=k$ 时，由韦恩图可知，只参加语文辅导的人数为 $k-30$，

只参加数学辅导的人数为 $k-30$，

语文和数学都参加辅导的人数为 $60-k$. ……………………………… 9 分

事件$\{\xi=k\}$所包含的基本事件的总数为 $C_{50}^{30}C_{30}^{k-30}C_{20}^{k-30}$，

所以 $P(\xi=k)=\dfrac{C_{50}^{30}C_{30}^{k-30}C_{20}^{k-30}}{(C_{50}^{30})^2}=\dfrac{C_{30}^{k-30}C_{20}^{k-30}}{C_{50}^{30}}$最大. ·· 10 分

则$\begin{cases}P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k+1),\\ P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k-1),\end{cases}$

所以$\begin{cases}C_{30}^{k-30}C_{20}^{k-30}\geqslant C_{30}^{k-29}C_{20}^{k-29},\\ C_{30}^{k-30}C_{20}^{k-30}\geqslant C_{30}^{k-31}C_{20}^{k-31}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(k-29)^2\geqslant(60-k)(50-k),\\ (61-k)(51-k)\geqslant(k-30)^2\end{cases}\Rightarrow 41\dfrac{27}{52}\leqslant k\leqslant 42\dfrac{27}{52}$. ················· 11 分

又因为 $k\in\mathbf{N}^*$,所以 $k=42$. ·· 12 分

21.【命题意图】主要考查函数的单调性和极值,函数导数的综合应用,考查考生的推理论证能力、运算求解能力、抽象概括能力,考查化归与转化思想和分类讨论思想.

【解析】(1)$a=\dfrac{1}{4}$,$f(x)=x-\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x$, $x\in(0,\pi)$,$f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x$. ············ 1 分

令 $T(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}x\sin x$,$T'(x)=-\dfrac{1}{2}x\cos x$. ·· 2 分

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$T'(x)<0$,$T(x)$单调递减,

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时,$T'(x)>0$,$T(x)$单调递增,

$T(x)$的最小值为 $T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{4}>0$,所以 $T(x)\geqslant T\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$,即 $f'(x)>0$, ························· 4 分

所以 $f(x)$在$(0,\pi)$上单调递增,所以 $f(x)<f(\pi)=\pi-0-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$,故 $f(x)<\dfrac{\pi}{2}$. ···················· 5 分

(2)$f(x)\geqslant0\Leftrightarrow 2ax(2+\cos x)-\sin x\geqslant0\Leftrightarrow 2ax-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}\geqslant0$.

令 $g(x)=2ax-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$, $x\geqslant0$, ··· 6 分

$g'(x)=2a-\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$. ··· 7 分

令 $t=\cos x$,$h(t)=\dfrac{2t+1}{(2+t)^2}$,$t\in[-1,1]$,$h'(t)=\dfrac{2(1-t)}{(2+t)^3}\geqslant0$,所以 $h(t)$在$[-1,1]$上单调递增,

所以 $h(-1)\leqslant h(t)\leqslant h(1)$,即$-1\leqslant h(t)\leqslant\dfrac{1}{3}$. ·· 8 分

①当 $2a\geqslant\dfrac{1}{3}$,即 $a\geqslant\dfrac{1}{6}$时,$g'(x)\geqslant0$,$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$ 满足条件. ··· 9 分

②当 $2a\leqslant0$,即 $a\leqslant0$ 时,$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi a-\dfrac{1}{2}<0$,显然不满足条件. ···································· 10 分

③当 $0<2a<\dfrac{1}{3}$,即 $0<a<\dfrac{1}{6}$时,若 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$g(x)<2ax-\dfrac{\sin x}{3}$,

令 $\varphi(x)=2ax-\dfrac{1}{3}\sin x$,$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\varphi'(x)=2a-\dfrac{1}{3}\cos x=\dfrac{1}{3}(6a-\cos x)$,$6a\in(0,1)$,

故存在 x_0,使 $x\in(0,x_0)$时,$\varphi'(x)<0$,即 $\varphi(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$,
即 $x\in(0,x_0)$,$g(x)<\varphi(x)<0$,故不满足条件. ··· 11 分

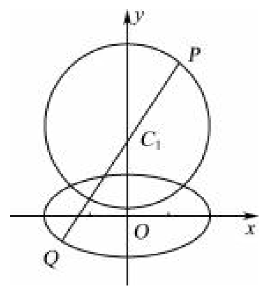
综上,a 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{6},+\infty\right)$. ··· 12 分

22.【命题意图】主要考查圆与椭圆的参数方程和椭圆的极坐标方程,考查考生的数形结合能力、化归转化能力和运算求解能力.

【解析】(1)曲线 $C_1:x^2+(y-2)^2=\frac{21}{9}\cos^2\theta+\frac{21}{9}\sin^2\theta$,即 $x^2+(y-2)^2=\frac{7}{3}$. ………………………… 2 分

曲线 $C_2:5\rho^2-3\rho^2\cos2\alpha=8$,即 $5\rho^2-3\rho^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=8$,

所以 $5(x^2+y^2)-3(x^2-y^2)=8$,即$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… 5 分



(2)设 $Q(2\cos\alpha,\sin\alpha)$,$C_1(0,2)$.

$|C_1Q|^2=(2\cos\alpha-0)^2+(\sin\alpha-2)^2=4-4\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-4\sin\alpha+4$

$=-3\sin^2\alpha-4\sin\alpha+8=-3\left(\sin\alpha+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$. ………………………… 8 分

当 $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$时,$|C_1Q|_{\max}=\sqrt{\frac{28}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$, ………………………… 9 分

所以$|PQ|_{\max}=\frac{2\sqrt{21}}{3}+\frac{\sqrt{21}}{3}=\sqrt{21}$.即$|PQ|$的最大值为$\sqrt{21}$. ………………………… 10 分

23.【命题意图】主要考查利用综合法和基本不等式求最值以及证明不等式,考查考生的推理论证能力和运算求解能力.

【解析】(1)因为 a,b,c 为正数,且 $a+b+c=1$,

所以$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{c}=1+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{c}+1\geqslant2+2\sqrt{\frac{c}{a+b}\cdot\frac{a+b}{c}}=4$.

当且仅当 $a+b=c$ 时取“=”,所以$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$的最小值为 4. ………………………… 6 分

(2)$a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}(a^4+b^4+b^4+c^4+a^4+c^4)\geqslant\frac{1}{2}(2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2)$.

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时等号成立. ………………………… 7 分

$\frac{1}{2}(2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2)=\frac{1}{2}(a^2b^2+b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+a^2c^2)$

$\geqslant\frac{1}{2}(2ab^2c+2a^2bc+2abc^2)=abc(b+a+c)=abc$.

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时等号成立. ………………………… 8 分

所以 $a^4+b^4+c^4\geqslant abc$.当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时等号成立. ………………………… 10 分