

重庆育才中学 西南大学附中
高 2024 届拔尖强基联盟高三十月联合考试

数学试题

(满分: 150 分; 考试时间: 120 分钟)

命题学校: 重庆育才中学
2023 年 10 月

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、班级、考场/座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 答选择题时, 必须使用 2B 铅笔填涂; 答非选择题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写; 必须在题号对应的答题区域内作答, 超出答题区域书写无效; 保持答卷清洁、完整。
3. 考试结束后, 将答题卡交回 (试题卷学生留存, 以备评讲)。

一. 单选题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z = \frac{3+2i}{i}$ (i 为虚数单位) 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 设集合 $A = \{x | x^2 \leq 4x\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x-3}\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B =$
A. $[0, 3)$ B. $[1, 3)$ C. $[3, 4]$ D. $[4, +\infty)$
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, 若 $a_4 + a_5 = 4$, 则 $a_2 + a_3 =$
A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 12 D. 36
4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (\lambda, -1)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$
A. -6 B. 0 C. $-\frac{10}{3}$ D. $-\frac{8}{3}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 则 " $a - b = c(\cos B - \cos A)$ " 是 $\triangle ABC$ 为直角三角形的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
6. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 在 $[-m, m]$ 上单调递增, 则实数 m 的最大值为
A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{5\pi}{12}$ C. $\frac{7\pi}{12}$ D. $\frac{11\pi}{12}$

第 1 页 (试卷共 6 页)

7. 新风机的工作原理是, 从室外吸入空气, 净化后输入室内, 同时将等体积的室内空气推向室外. 假设某房间的体积为 v_0 , 初始时刻室内空气中含有颗粒物的质量为 m . 已知某款新风机工作时, 单位时间内从室外吸入的空气体积为 v ($v > 1$), 室内空气中颗粒物的浓度与时刻 t 的函数关系为 $\rho(t) = (1-\lambda)\frac{m}{v_0} + \lambda\frac{m}{v_0}e^{-\lambda t}$, 其中常数 λ 为过滤效率. 若该款新风机的过滤效率为 $\frac{4}{5}$, 且 $t=1$ 时室内空气中颗粒物的浓度是 $t=2$ 时的 $\frac{3}{2}$ 倍, 则 v 的值约为 (参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$)

A. 1.3862 B. 1.7917 C. 2.1972 D. 3.5834

8. 已知角 α, β 均在 $(0, \pi)$ 内, $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 则角 β 的值为

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

二. 多选题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 关于平面向量, 有下列四个命题, 其中说法正确的是

A. 向量 $\vec{e}_1 = (2, -3)$, $\vec{e}_2 = (-1, \frac{3}{2})$ 能作为平面内所有向量的一组基底

B. 若点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 则 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$ 或 $\vec{b} = \vec{0}$

D. 若向量 $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (2, 3)$, 则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}}{2}$

10. 设函数 $f(x) = \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称

C. $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{6}$ D. $f(x)$ 的最大值为 1

11. 以下说法错误的是

A. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 2]$, 则 $f(x+1)$ 的定义域为 $[2, 3]$

B. 若 $f(x)$ 在 $x \in R$ 上的值域 $[a, b]$, 则 $f(\sin x)$ 在 $x \in R$ 上的值域也为 $[a, b]$

C. 若 $f(2x+1) - \frac{2^x-1}{2^x+1}$ 为 R 上的奇函数, 则 $f(1-x)$ 也为 R 上的奇函数

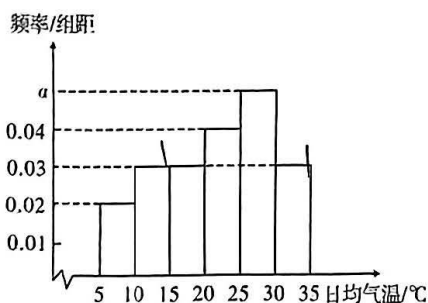
D. 若 $f(x)$ 是 R 上的单调递增函数, 则 $f(\sqrt{1-x})$ 是 $(-\infty, 1]$ 的单调递减函数

19. (12分)

太阳能热水器因节能环保而深受广大消费者的青睐,但它也有缺点——持续阴天或雨天便无法正常使用.为了解决这一缺陷,现在的太阳能热水器水箱上都安装了辅助电加热器,如果天气不好或冬季水温无法满足需要时,就可以通过辅助电加热器把水温升高,方便用户使用.某工厂响应“节能减排”的号召,决定把原来给锅炉加热的电热水器更换成电辅式太阳能热水器.电辅式太阳能热水器的耗电情况受当天的日照时长和日均气温影响,假设每天的日照情况和日均气温相互独立,该电辅式太阳能热水器每日耗电情况如下表所示:

日照情况	日均气温不低于 15°C	日均气温低于 15°C
日照充足	耗电 0 千瓦时	耗电 5 千瓦时
日照不足	耗电 5 千瓦时	耗电 10 千瓦时
日照严重不足	耗电 15 千瓦时	耗电 20 千瓦时

根据调查,当地每天日照充足的概率为 $\frac{2}{5}$,日照不足的概率为 $\frac{2}{5}$,日照严重不足的概率为 $\frac{1}{5}$.2023 年这一年的日均气温的频率分布直方图如图所示,区间分组为 $[5,10)$, $[10,15)$, $[15,20)$, $[20,25)$, $[25,30)$, $[30,35]$.



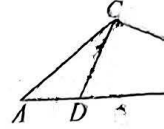
- 求图中 a 的值,并求一年中日均气温不低于 15°C 的频率;
- 用频率估计概率,已知该工厂原来的电热水器平均每天耗电 20 千瓦时,试估计更换电辅式太阳能热水器后,每天能省多少电?

20. (12分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 AB 边上, $BD = 2AD$, $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$.

(1) 求证: $BC = \sqrt{2}AC$;

(2) 若 $CD = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 $S_{\triangle ABC}$.



21. (12分)

已知函数 $f(x) = 2^x$, 函数 $h(x)$ 与 $f(x)$ 关于点 $(\log_2 3, \frac{3a}{2})$ 中心对称.

(1) 求 $h(x)$ 的解析式;

(2) 若方程 $f(x) = h(x)$ 有两个不等的实根 x_1, x_2 , 且 $|x_1 - x_2| = 2$, 求 a 的值.

22. (12分)

已知 $f(x) = \cos x + \sin 2x + \lambda x$

(1) 若对 $\forall x_1, x_2 \in R$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 恒成立, 求 λ 的取值范围;

(2) 当 $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ 时, $f(x)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上的最大值为 $g(\lambda)$, 求 $g(\lambda)$ 的值域.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

