

河池市 2023 年春季学期高二年级期末教学质量检测

数 学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并收回。
4. 本卷主要考查内容:选择性必修第一册,选择性必修第二册,选择性必修第三册。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 过点 $(1, 2)$ 且斜率为 3 的直线方程为

A. $3x - y - 1 = 0$

B. $3x - 2y + 1 = 0$

C. $x + y + 1 = 0$

D. $x + y - 1 = 0$

2. 2023《中国好声音》报名即将开始,选手们可通过拨打热线电话或登陆官网两种方式之一来报名。现有甲、乙、丙三人均要报名参加,则不同的报名方法有

A. 4 种

B. 6 种

C. 8 种

D. 9 种

3. 下列说法中正确的是

A. 相关系数 r 越大,则两变量的相关性就越强

B. 经验回归方程不一定过样本中心点

C. 对于经验回归方程 $\hat{y} = 3 + 2x$,当变量 x 增加 1 个单位时, y 平均增加 3 个单位

D. 对于经验回归方程 $\hat{y} = 2 - x$,变量 x 与变量 y 负相关

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,其上顶点为 A ,左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,且三角形 AF_1F_2 为等边三角形,则椭圆 C 的离心率为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - \ln x$,则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $(0, 1)$

B. $(1, +\infty)$

C. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$

D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ,焦距为 $2c$,以线段 F_1F_2 为

直径的圆在第一象限交双曲线 C 于点 A , $\sin \angle AF_1F_2 = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$,则双曲线 C 的渐近线方程为

A. $y = \pm x$

B. $y = \pm \sqrt{3}x$

C. $y = \pm 2x$

D. $y = \pm \sqrt{2}x$

7. 已知随机变量 $X, Y, X \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $E(Y) = 8P(X=2)$, 又 $P(Y \leq 0) = P(Y \geq m^2 + 2)$, 则实数 m 的值为
- A. 0 或 2 B. 2 C. -2 或 2 D. -2

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_n} = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$, 数列 $\{(\lambda n + 1)(2^n - 1)a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 S_n 的最大值仅为 S_8 , 则实数 λ 的取值范围是

- A. $\left[-\frac{1}{10}, -\frac{1}{11}\right]$ B. $\left(-1, -\frac{1}{9}\right]$ C. $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{9}\right)$ D. $\left[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}\right]$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知随机变量 X 满足 $E(2X+1)=5, D(3X-1)=9$, 则下列说法正确的是

- A. $E(X)=2$ B. $E(X)=\frac{5}{4}$ C. $D(X)=1$ D. $D(X)=3$

10. 关于 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式, 下列说法正确的是

- A. 各项的系数之和为 -1 B. 二项式系数的和为 512
C. 展开式中无常数项 D. 第 4 项的系数最大

11. 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1, A(3, 1)$, 点 P 为圆 C 上一动点, O 为坐标原点, 则下列说法中正确的是

- A. $|AP|$ 的最大值为 $\sqrt{5} + 1$
B. $|OP| + |PA|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$
C. 直线 AP 的斜率范围为 $\left[0, \frac{4}{3}\right]$
D. 以线段 AC 为直径的圆与圆 C 的公共弦方程为 $y = -2x + \frac{3}{2}$

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 在直线 $l: y = kx - k$ 上, 直线 l 与抛物线交于点 A, B , (O 为坐标原点), 则下列说法中正确的是

- A. $p=2$
B. 准线方程为 $x=-2$
C. 以线段 AB 为直径的圆与 C 的准线相切
D. 直线 OA, OB 的斜率之积为定值

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$, $a_1 + a_6 + a_{11} = 6$, 且 $a_4 = 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$, 则在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程为 _____.

15. 某游泳队共有 20 名队员, 其中一级队员有 10 名, 二级队员有 5 名, 三级队员有 5 名, 若一、二、三级队员通过选拔进入比赛的概率分别是 0.8, 0.7, 0.5, 则任选一名队员能通过选拔进入比赛的概率为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (a+2)x + 2a \ln x + 1$ 在 $(4, 6)$ 上存在极值点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=4, a_5=32$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

生态环境部、工业和信息化部、商务部、海关总署、市场监管总局等五部门联合发布《关于实施汽车国六排放标准有关事宜的公告》，明确出自 2023 年 7 月 1 日起，全国范围全面实施国六排放标准 6b 阶段，禁止生产、进口、销售不符合国六排放标准 6b 阶段的汽车. 为调查市民对此公告的了解情况，对某市市民进行抽样调查，得到的数据如下表：

	了解	不了解	合计
女性	140	60	200
男性	180	20	200
合计	320	80	400

(1) 根据以上数据，依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否认为对此公告的了解情况与性别有关？并说明原因；

(2) 以样本的频率为概率. 在全市随机抽取 5 名市民进行采访，求这 5 名中恰有 3 名为“了解”的概率.

附：

α	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

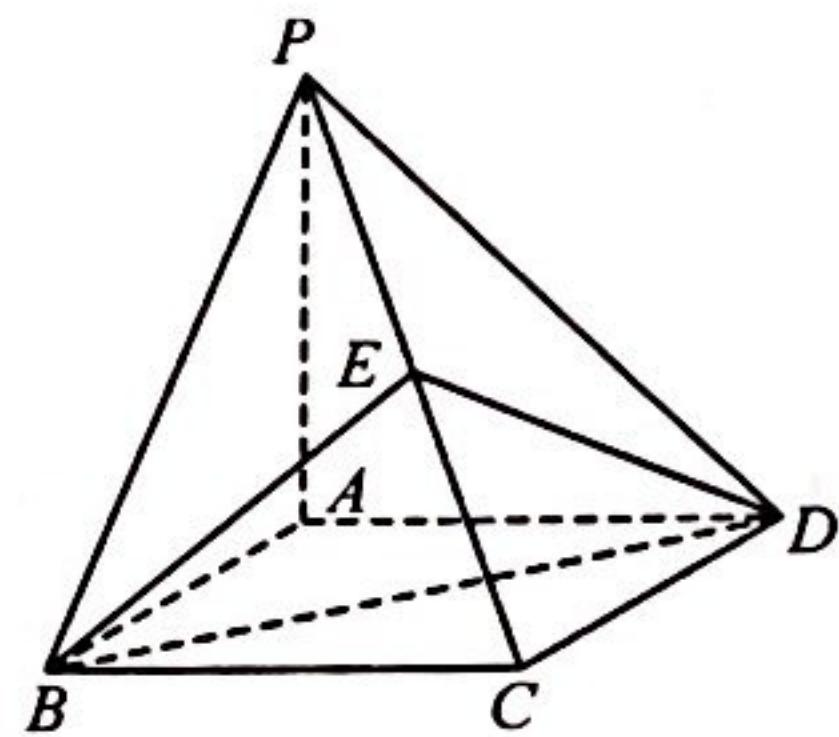
参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n=a+b+c+d$.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle DAB = 120^\circ$, $PA = AD = 2$, $PC = PD = 2\sqrt{2}$. 点 E 是棱 PC 的中点.

(1) 证明: $PC \perp BD$;

(2) 求平面 PAB 与平面 BDE 所成角的大小.



20. (本小题满分 12 分)

为深入学习贯彻党的二十大精神, 认真贯彻落实习近平总书记在二十大报告中指出的“加快义务教育优质均衡发展和城乡一体化, 优化区域教育资源配置”指示精神, 促进城乡教育高质量发展. 某市第一中学打算从各年级推荐的总共 6 名老师中任选 3 名去参加“送教下乡”的活动. 这 6 名老师中, 英语老师、化学老师、数学老师各 2 名.

(1) 求选出的数学老师人数多于英语老师人数的概率;

(2) 设 X 表示选出的 3 人中数学老师的人数, 求 X 的均值与方差.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 上顶点为 B , $|BF| = 2$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 若直线 $l: y = x - 2m (m \neq 0)$ 与椭圆 E 相交于 A, C 两点, 且点 $N(0, m)$, 当 $\triangle ACN$ 的面积最大时, 求直线 l 的方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{x-1} - \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 求证: $exf(x) + (ex-1)\ln x - e^x + \frac{1}{2} > 0$.