2021 年东北三省四市教研联合体高考模拟试卷(一)

数学(理科)

第 Ⅰ 卷

注意事项:1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题:本大题共 12 小题. 每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x-4>0\}$,$B=\{x\mid x>2\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x\mid x>4\}$　　B. $\{x\mid x>2$ 或 $x<-1\}$

C. $\{x\mid x>4$ 或 $x<-1\}$　　D. $\{x\mid x<-1\}$

2. 若复数 z 满足 $(1+i)z=|2+i|$,则复数 z 的虚部是

A. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}i$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}i$

3. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$,则 $\cos 2\alpha=$

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $\frac{7}{25}$　　C. $\frac{16}{25}$　　D. $\frac{9}{25}$

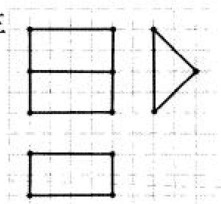
4. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+2\leqslant 0,\\ 4x-y-4\geqslant 0,\\ x\geqslant 4,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值为

A. 8　　B. 12　　C. 14　　D. 20

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$,$\boldsymbol{b}$ 是单位向量,若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 如图,网格纸上小正方形的边长为 1,粗实线画出的是某几何体的三视图,则该几何体的体积为



A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{16}{3}$

C. 16　　D. 24

7. $5G$ 是第五代移动通信技术的简称,其意义在于万物互联,即所有人和物都将存在于有机的数字生态系统中,它把以人为中心的通信扩展到同时以人与物为中心的通信,将会为社会生活与生产方式带来巨大的变化. 目前我国最高的 $5G$ 基站海拔 6500 米. 从全国范

围看，中国5G发展进入了全面加速阶段，基站建设进度超过预期. 现有8个工程队共承建10万个基站，从第二个工程队开始，每个工程队所建的基站数都比前一个工程队少$\frac{1}{6}$，则第一个工程队承建的基站数(单位:万)约为

A. $\frac{10\times6^8}{6^8-5^8}$　　B. $\frac{10\times6^7}{6^8-5^8}$　　C. $\frac{80\times6^7}{6^8-5^8}$　　D. $\frac{10\times6^6}{6^8-5^8}$

8. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2$，$BC=4$，$AA_1=4\sqrt{3}$. 过BC的平面分别交线段AA_1，DD_1于M，N两点，四边形$BCNM$为正方形，则异面直线D_1M与BD所成角的余弦值为

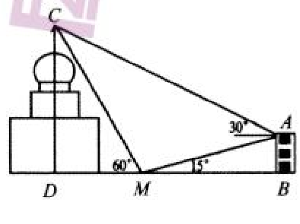
A. $\frac{\sqrt{14}}{14}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$　　C. $\frac{\sqrt{14}}{4}$　　D. $\frac{4\sqrt{35}}{35}$

9. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的图象相邻的两个对称轴之间的距离为$2\pi$. 若将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到奇函数$g(x)$的图象，则$\varphi$的值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $-\frac{\pi}{3}$

10. 圣·索菲亚教堂(英语:SAINT SOPHIA CATHEDRAL)坐落于中国黑龙江省，是一座始建于1907年拜占庭风格的东正教教堂，距今已有114年的历史，为哈尔滨的标志性建筑. 1996年经国务院批准，被列为第四批全国重点文物保护单位，是每一位到哈尔滨旅游的游客拍照打卡的必到景点. 其中央主体建筑集球，圆柱，棱柱于一体，极具对称之美，可以让游客从任何角度都能领略它的美. 小明同学为了估算索菲亚教堂的高度，在索菲亚教堂的正东方向找到一座建筑物AB，高为$(15\sqrt{3}-15)$ m，在它们之间的地面上的点M(B,M,D三点共线)处测得楼顶A，教堂顶C的仰角分别是$15°$和$60°$，在楼顶A处测得塔顶C的仰角为$30°$，则小明估算索菲亚教堂的高度为

A. 20m　　B. 30m　　C. $20\sqrt{3}$ m　　D. $30\sqrt{3}$ m



11. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2x-5$，记$a=f(\log_2 3)$，$b=f(\log_3\sqrt{2})$，$c=f(0.6^{0.5})$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

12. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 有公共的左、右焦点，分别为 F_1,F_2. 以线段 F_1F_2 为直径的圆与双曲线 C 及其渐近线在第一象限内分别交于 M，N 两点，且线段 NF_1 的中点在另外一条渐近线上，则 ΔOMF_2 的面积为

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

第 Ⅱ 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $a>0,b>0,a+b=2$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为________.

14. 在$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中$\frac{1}{x^2}$ 的系数为________.

15. 在平面直角坐标系中，直线 $mx+y-2m-2=0$ 与圆 $C:(x-1)^2+(y-4)^2=9$ 交于 M,N 两点. 当 ΔMNC 的面积最大时，实数 m 的值为________.

16. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}f(x-2), & x>0,\end{cases}$ 当 n 分别取 $1,2,3,\cdots,k,(k\in \mathbf{N}^*)$ 时，方程 $f(x)=\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 对应的整数解分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，则 $\sum\limits_{k=1}^{20}x_k=$ ________.

三、解答题

17.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_5=25$，且 a_3-1,a_4+1,a_7+3 成等比数列.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_n=(-1)^n a_n+1$，T_n 是数列$\{b_n\}$ 的前 n 项和，求 T_{2n}.

18.（本小题满分 12 分）

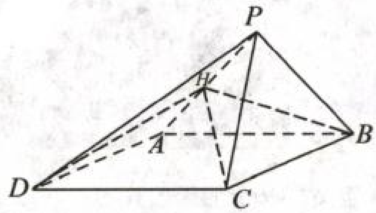
已知圆 $F:(x-1)^2+y^2=1$，动点 $M(x,y)(x\geqslant 0)$，线段 FM 与圆 F 交于点 I，$MH\perp y$ 轴，垂足为 H，$|MI|=|MH|$，设动点 M 形成的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求曲线 C 的轨迹方程，并证明斜率为 -2 的一组平行直线与曲线 C 相交形成的弦的中点在一条直线上；

（Ⅱ）曲线 C 上存在关于直线 $l:x-2y-3=0$ 对称的相异两点 A 和 B，求线段 AB 的中点 D 的坐标.

19.（本小题满分 12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为2的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，$PA\perp PB$，$PA=PB$，$PC=2$.



（Ⅰ）证明：平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）H 为 PA 的中点，求二面角 $D-CH-B$ 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）

2020 年爆发人群广泛感染的新型冠状病毒是一种可以借助飞沫和接触传播的变异病毒. 某市防疫部门为尽快筛查出新冠病毒感染者，将高风险地区及重点人群按照 1∶1 单样检测，中风险地区可以按照 5∶1 混样检测，低风险地区可以按照 10∶1 混样检测. 单样检测即为逐份检测，混样检测是将 5 份或 10 份样本分别取样后混合在一起检测. 若检测结果为阴性，则全为阴性，若检测结果为阳性，就要同时对这几份样本进行单独逐一检测. 假设在接受核酸检测样本中，每份样本的检测结果是阳性还是阴性都是相互独立的，且中风险地区每份样本是阳性结果的概率均为 $p(0<p<1)$.

（Ⅰ）现有该市中风险地区 A 的 5 份核酸检测样本要进行 5∶1 混样检测，求检测总次数为 6 次的概率.

（Ⅱ）现有该市中风险地区 B 的 15 份核酸检测样本，已随机平均分为三组，要采用 5∶1 混样检测，设检测总次数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $F(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{a}{x+1}$.

（Ⅰ）设函数 $h(x)=(x-1)F(x)$，当 $a=2$ 时，证明：当 $x>1$ 时，$h(x)>0$；

（Ⅱ）若 $F(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）若 a 使 $F(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2，证明：$2\sqrt{a^2-2a}<|x_2-x_1|<e^a-e^{-a}$.

请考生在 22、23 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

已知某曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）.

（Ⅰ）若 $P(x,y)$ 是曲线 C 上的任意一点，求 $x+2y$ 的最大值；

（Ⅱ）已知过 C 的右焦点 F，且倾斜角为 $\alpha\left(0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的直线 l 与 C 交于 D,E 两点，设线段 DE 的中点为 M，当 $\dfrac{\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{1}{|FE|}+\dfrac{1}{|FD|}\right)=|FM|$ 时，求直线 l 的普通方程.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x+4a|$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\leqslant 7$ 的解集；

（Ⅱ）对于任意的正实数 m,n，且 $3m+n=1$，若 $f(x)\geqslant\dfrac{mn}{m^2+n}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2021 年东北三省四市教研联合体高考模拟试卷(一) 数学(理科) 答案

一、1. B　2. A　3. B　4. C　5. C　6. C　7. B　8. D　9. A　10. D　11. D　12. B

二、13. $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$　　14. 60　　15. -1 或 $-\frac{1}{7}$　　16. 400

三、

17. 解：(Ⅰ) $\because S_5 = 5a_3 = 25, \therefore a_3 = 5$ ……………………………… 1 分

设数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_3 - 1, a_4 + 1, a_7 + 3$ 成等比数列得

$(6+d)^2 = 4(8+4d)$ ……………………………… 3 分

$\therefore d^2 - 4d + 4 = 0 \quad \therefore d = 2$ ……………………………… 5 分

$\therefore a_n = a_3 + (n-3)d = 2n - 1$ ……………………………… 6 分

(Ⅱ) $\because b_n = (-1)^n a_n + 1$ ……………………………… 8 分

$\therefore T_{2n} = (-1+1)+(3+1)+(-5+1)+(7+1)+\cdots+[-(4n-3)+1]+(4n-1+1)$

$= 4n$ ……………………………… 12 分

18. 解：(Ⅰ) $\because |MI|+1 = |MF| = |MH|+1$

$\therefore$ 点 M 的轨迹 C 为以 F 为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线 ……………… 1 分

$\therefore$ 曲线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ ……………………………… 3 分

设点 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$ 为其中任意一条斜率为 -2 的直线与曲线 C 的两个交点，设线段 A_1A_2 的中点为 $E(x, y)$，则$\begin{cases} y_1^2 = 4x_1, \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$，

则$(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4(x_1 - x_2)$，

$\therefore k_{A_1A_2} = \frac{4}{y_1 + y_2} = -2$，……………………………… 5 分

$\therefore y_1 + y_2 = -2 = 2y$ ……………………………… 6 分

$\therefore y = -1$，

所以这组斜率为 -2 的平行直线与曲线 C 相交形成的弦的中点在直线 $y=-1$ 上；……………………………… 7 分

(Ⅱ) 设点 $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$，则$\begin{cases} y_3^2 = 4x_3, \\ y_4^2 = 4x_4, \end{cases}$，则$(y_3 - y_4)(y_3 + y_4) = 4(x_3 - x_4)$，

$\therefore k_{AB} = \frac{4}{y_3 + y_4}$，……………………………… 8 分

又 $\because A, B$ 关于直线 l 对称，$\therefore k_{AB} = -2$，……………………………… 9 分

即 $y_3 + y_4 = -2, \therefore \frac{y_3 + y_4}{2} = -1$，……………………………… 10 分

又 $\because AB$ 的中点一定在直线 l 上，$\therefore \frac{x_3 + x_4}{2} - 2 \times \frac{y_3 + y_4}{2} + 3 = 1$，

$\therefore$ 线段 AB 的中点 D 坐标为$(1, -1)$. ……………………………… 12 分

19. 解：(Ⅰ) 证明：取 AB 中点为 O，连接 CO 和 PO，再连接 AC，

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AB = BC = AD = CD$.

再由 $\angle ABC = 60°$，知 ΔABC 为等边三角形.

因为 O 为 AB 中点，所以 $CO \perp AB$，由勾股定理得 $CO = \sqrt{3}$. ……………… 1 分

因为 $PA \perp PB, PA = PB$，所以 $PO \perp AB$，……………………………… 2 分

且 $PO = \frac{1}{2}AB = 1$.

由 $PO^2+CO^2=PC^2$ 得 $CO\perp OP$， ………………………… 3 分

再由 $PO\perp AB$ 和 $OC\cap AB=O$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$， ………………………… 4 分

由 $PO\subset$ 平面 PAB，

所以平面 $ABCD\perp$ 平面 PAB. ………………………… 5 分

（Ⅱ）以 O 为原点，OC、OB、OP 方向为 x 轴、y 轴、z 轴，如图建立空间直角坐标系.

$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,1)$，$H(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

从而 $\overrightarrow{CH}=(-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$.

设平面 DCH 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{CH}$，$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DC}$，即：

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CH}=-\sqrt{3}x_1-\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}z_1=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DC}=2y_1=0\end{cases}$，取 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,2\sqrt{3})$ ………………… 7 分

设平面 BCH 的法向量为 $\overrightarrow{\boldsymbol{n}_2}=(x_2,y_2,z_2)$，由 $\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{CH}$，$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{BC}$，即：

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CH}=-\sqrt{3}x_2-\frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}z_2=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}x_2-y_2=0\end{cases}$，取 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},3\sqrt{3})$ ………………… 9 分

设所求二面角为 θ：

$|\cos\theta|=|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{1+0+18}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{31}}=\frac{19}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{31}}$

$=\frac{19}{403}\sqrt{403}$ ………………………… 11 分

因为 θ 是钝角，所以所求二面角的余弦值为 $-\frac{19}{403}\sqrt{403}$. ………………… 12 分

20. 解：（Ⅰ）设“检测总次数为 6 次”为事件 A

$P(A)=1-(1-p)^5$

$\therefore$ 检测总次数为 6 次的概率为 $1-(1-p)^5$ ………………… 5 分

（Ⅱ）（法一）X 的所有可能取值为 3，8，13，18 ………………… 6 分

$\therefore P(X=3)=(1-p)^{15}$ ………………………… 7 分

$P(X=8)=C_3^1[1-(1-p)^5]\cdot(1-p)^{10}=3[1-(1-p)^5]\cdot(1-p)^{10}$

………………………… 8 分

$P(X=13)=C_3^2[1-(1-p)^5]^2\cdot(1-p)^5=3[1-(1-p)^5]^2\cdot(1-p)^5$

………………………… 9 分

$P(X=18)=C_3^3[1-(1-p)^5]^3=[1-(1-p)^5]^3$ ………………… 10 分

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	3	8	13	18
P	$(1-p)^{15}$	$3[1-(1-p)^5]\cdot(1-p)^{10}$	$3[1-(1-p)^5]^2\cdot(1-p)^5$	$[1-(1-p)^5]^3$

………………………… 11 分

设 $(1-p)^5=t$

$\therefore E(X)=3\times t^3+8\times3(1-t)t^2+13\times3(1-t)^2t+18\times(1-t)^3$

$=18-15t=18-15(1-p)^5$ ………………………… 12 分

（法二）X 的所有可能取值为 3，8，13，18

设 $(1-p)^5=t$，Y 为三个小组中出现阳性的小组数，

则 $X=5Y+3$，$Y\sim B(3,1-t)$

$\therefore P(X=3)=P(Y=0)=t^3=(1-p)^{15}$

$P(X=8)=P(Y=1)=C_3^1(1-t)\cdot t^2=3[1-(1-p)^5]\cdot(1-p)^{10}$

$P(X=13)=P(Y=2)=C_3^2(1-t)^2\cdot t=3[1-(1-p)^5]^2\cdot(1-p)^5$

$P(X=18)=P(Y=3)=C_3^3(1-t)^3=[1-(1-p)^5]^3$

所以,随机变量 X 的分布列为:

X	3	8	13	18
P	$(1-p)^{15}$	$3[1-(1-p)^5]\cdot(1-p)^{10}$	$3[1-(1-p)^5]^2\cdot(1-p)^5$	$[1-(1-p)^5]^3$

$\therefore E(X)=E(5Y+3)=5E(Y)+3$

$=5\times3(1-t)+3=18-15t=18-15(1-p)^5$

21. 解:(Ⅰ) $h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$. ………………………………………… 1 分

当 $x>1$ 时,$h'(x)>0$,所以 $h(x)$ 在$(1,+\infty)$上为单调递增函数, …… 2 分

$\because h(1)=0$ ……………………………………………………………… 3 分

$\therefore h(x)>h(1)=0$ ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ) 设函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}$, 则 $f'(x)=\dfrac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$.

令 $g(x)=x^2+2(1-a)x+1$, 当 $a\leqslant1$ 时, 当 $x>0$ 时, $g(x)>0$,

当 $1<a\leqslant2$ 时, $\Delta=4a^2-8a\leqslant0$, 得 $g(x)\geqslant0$,

所以当 $a\leqslant2$ 时, $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上为单调递增函数, 且 $f(1)=0$, … 5 分

所以有 $\dfrac{1}{x-1}f(x)>0$, 可得 $F(x)>0$. …………………………………… 6 分

当 $a>2$ 时, 有 $\Delta=4a^2-8a>0$, 此时 $g(x)$ 有两个零点, 设为 t_1, t_2, 且 $t_1<t_2$.

又因为 $t_1+t_2=2(a-1)>0$,$t_1t_2=1$, 所以 $0<t_1<1<t_2$,

在$(1,t_2)$ 上, $f(x)$ 为单调递减函数, 所以此时有 $f(x)<0$,

即 $\ln x<\dfrac{a(x-1)}{x+1}$, 得 $\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{a}{x+1}<0$, 此时 $F(x)>0$ 不恒成立, … 7 分

综上 $a\leqslant2$. …………………………………………………………………… 8 分

(Ⅲ) 若 $F(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2,不妨设 $x_1<x_2$,

则 x_1,x_2 为 $f(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}$ 的两个零点, 且 $x_1\neq1$,$x_2\neq1$,

由(Ⅱ) 知此时 $a>2$, 并且 $f(x)$ 在$(0,t_1)$,$(t_2,+\infty)$ 为单调递增函数,

在(t_1,t_2) 上为单调递减函数, 且 $f(1)=0$, 所以 $f(t_1)>0$,$f(t_2)<0$, ……

………………………………………………………………………………… 9 分

因为 $f(e^{-a})=-\dfrac{2a}{e^a+1}<0$, $f(e^a)=\dfrac{2a}{e^a+1}>0$, $e^{-a}<1<e^a$ ……… 10 分

且 $f(x)$ 图象连续不断,

所以 $x_1\in(e^{-a},t_1)$,$x_2\in(t_2,e^a)$, 所以 $t_2-t_1<x_2-x_1<e^a-e^{-a}$, … 11 分

因为 $t_2-t_1=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=2\sqrt{a^2-2a}$,

综上得 $2\sqrt{a^2-2a}<|x_2-x_1|<e^a-e^{-a}$. ……………………………… 12 分

22. 解:(Ⅰ) 依题意得:$x=2\cos\varphi$,$y=\sin\varphi$,

$x+2y=2\cos\varphi+2\sin\varphi=2\sqrt{2}\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})$, ………………………… 2 分

当 $\varphi+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,$k\in Z$,即 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 时,$k\in Z\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})=1$

…………………………………………………………………………

$x+2y$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$ …………………………………… 4 分

（Ⅱ）$x=2\cos\varphi, y=\sin\varphi$，

由于 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$，整理得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

由直线 l 的倾斜角为 $\alpha(0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2})$，依题意易知：$F(\sqrt{3},0)$， …………… 5 分

可设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）

代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得到：$(1+3\sin^2\alpha)t^2+2\sqrt{3}t\cos\alpha-1=0$，

易知 $\Delta=12\cos^2\alpha+4(1+3\sin^2\alpha)=16>0$， …………………… 6 分

设点 D 和点 E 对应的参数为 t_1 和 t_2，

所以 $t_1+t_2=\frac{-2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$，$t_1t_2=-\frac{1}{1+3\sin^2\alpha}<0$. …………………… 7 分

则 $|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{4}{1+3\sin^2\alpha}$，

由参数的几何意义：$\frac{1}{|EF|}+\frac{1}{|FD|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=4$ ……… 8 分

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{16}(\frac{1}{|EF|}+\frac{1}{|FD|})=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$

$|FM|=\left|\frac{t_1+t_2}{2}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}\right|=\frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{4}$， …………………… 9 分

所以 $\cos\alpha=\frac{2}{3}$，

所以直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，直线 l 的普通方程为 $\sqrt{5}x-2y-\sqrt{15}=0$.

…………………………………………………………………… 10 分

23. 解：（Ⅰ）原不等式为 $|x+1|+|x+4|\leqslant 7$，

当 $x\leqslant-4$ 时，得 $-x-1-x-4\leqslant 7$，得 $x\geqslant-6$，

所以 $-6\leqslant x\leqslant-4$. …………………………………… 1 分

当 $-4<x\leqslant-1$ 时，得 $-x-1+x+4\leqslant 7$ 成立，所以 $-4<x\leqslant-1$

…………………………………………………………… 2 分

当 $x>-1$ 时，$x+1+x+4\leqslant 7$，

所以 $-1<x\leqslant 1$. …………………………………… 3 分

综上得不等式的解集为 $\{x|-6\leqslant x\leqslant 1\}$. …………………… 4 分

（Ⅱ）因为 m,n 为正实数，并且 $\frac{m^2+n}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{1}{m}=\frac{m}{n}+\frac{3m+n}{m}=3+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 3+$

$2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}}=5$， …………………………………… 6 分

当 $m=n=\frac{1}{4}$ 时等号成立，

所以 $\frac{mn}{m^2+n}$ 的最大值为 $\frac{1}{5}$. …………………………………… 8 分

又因为 $f(x)\geqslant|x+4a-(x+a)|=|3a|$，当 $x=-a$ 时取到等号，…… 9 分

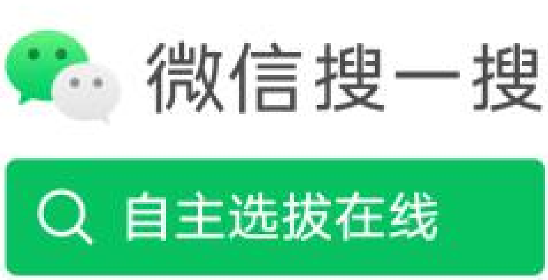
要使 $f(x)\geqslant\frac{mn}{m^2+n}$ 恒成立，只需 $|3a|\geqslant\frac{1}{5}$.

所以 $a\leqslant-\frac{1}{15}$ 或 $a\geqslant\frac{1}{15}$ …………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》