



数 学 (文科)

2017.1

学校_____ 班级_____ 姓名_____ 成绩_____

本试卷共4页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 复数 $i(2-i)$ 在复平面内对应的点的坐标为 $2i - (-1) = 2i + 1$
 A. $(-2, 1)$ B. $(2, -1)$ C. $(1, 2)$ D. $(-1, 2)$

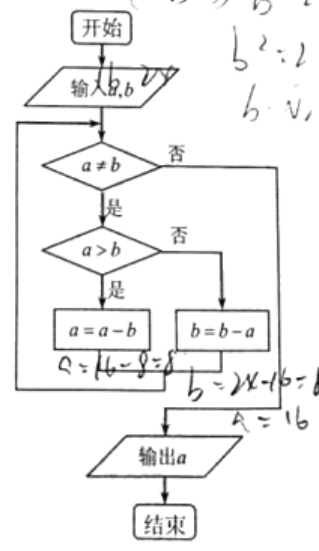
2. 抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点到准线的距离为 $p = 1$
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 3

3. 下列函数中,既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是
 A. $y = (\frac{1}{2})^x$ B. $y = -x^2$ C. $y = \log_2 x$ D. $y = |x| + 1$

4. 已知向量 a, b 满足 $a - 2b = 0, (a-b) \cdot b = 2$, 则 $|b| =$
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

5. 右侧程序框图所示的算法来自于《九章算术》. 若输入 a 的值为 16, b 的值为 24, 则执行该程序框图输出的结果为
 A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

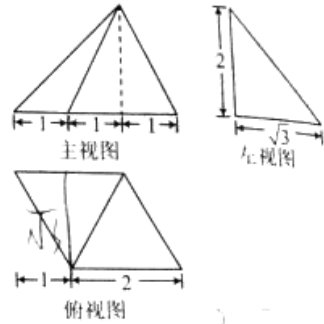
6. 在 $\triangle ABC$ 中, " $A < 30^\circ$ " 是 " $\sin A < \frac{1}{2}$ " 的
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件





7. 已知某四棱锥的三视图如右图所示, 则该几何体的体积为

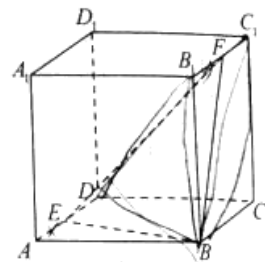
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
C. 2
D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$



$2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$

8. 如图, 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, E, F 分别是棱 AD, B_1C_1 上的动点, 设 $AE = x, B_1F = y$. 若棱 DD_1 与平面 BEF 有公共点, 则 $x + y$ 的取值范围是

- A. $[0, 1]$
B. $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$
C. $[1, 2]$
D. $[\frac{3}{2}, 2]$



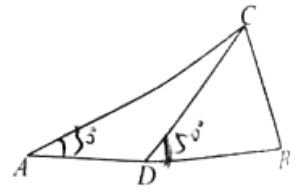
二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

9. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 则双曲线 C 的一条渐近线的方程为 $y = \pm 2x$.
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_3 = 3$, 则 $a_1 = -1$, 其前 n 项和 $S_n = -n + n^2$.
11. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$, 则圆心 C 的坐标为 $(1, 0)$, 圆 C 截直线 $y = x$ 所得的弦长为 $\sqrt{2}$.
12. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ 0 \leq y \leq 3, \\ x + 2y \leq 8, \end{cases}$ 则目标函数 $z = 2x + y$ 的最大值为 10.

13. 如图所示, 点 D 在线段 AB 上, $\angle CAD = 30^\circ, \angle CDB = 50^\circ$. 给出下列三组条件(线段的长度):

- ① AD, DB ; ② AC, DB ; ③ CD, DB .

其中, 能使 $\triangle ABC$ 唯一确定的条件的序号为 ①②③. (写出所有符合要求的条件的序号)





14. 已知A、B两所大学的专业设置都相同(专业数不小于2), 数据显示,A大学的各专业的男女生比例均高于B大学的相应专业的男女生比例(男女生比例是指男生人数与女生人数的比). 据此,

甲同学说:“A大学的男女生比例一定高于B大学的男女生比例”; ✓

乙同学说:“A大学的男女生比例不一定高于B大学的男女生比例”;

丙同学说:“两所大学全体学生的男女生比例一定高于B大学的男女生比例”. ✓

其中,说法正确的同学是_____.

A >
B >
C > B
e > p

三、解答题共6小题,共80分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

15. (本小题满分13分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列,且 $a_2 = 1, a_3 + a_4 = 6$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{a_n - n\}$ 的前n项和为 S_n ,比较 S_4 和 S_5 的大小,并说明理由.

16. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x}{\cos x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域及 $f(\frac{\pi}{4})$ 的值;

(II) 求 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的单调递增区间.

17. (本小题满分13分)

诚信是立身之本,道德之基.某校学生会创设了“诚信水站”,既便于学生用水,又推进诚信教育,并用“ $\frac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$ ”表示每周“水站诚信度”.为了便于数据分析,以四周为一周期,下表为该水站连续八周(共两个周期)的诚信度数据统计,如表1:

90% 表1 12 = 1 + 11 -15

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一个周期	95%	98%	92%	88%
第二个周期	94%	94%	83%	80%

高三数学(文科)试卷 第3页(共4页) 4 1/2 90%



- (I) 计算表1中八周水站诚信度的平均数 \bar{x} ;
 (II) 从表1水站诚信度超过91%的数据中,随机抽取2个,求至少有1个数据出现在第二个周期的概率;
 (III) 学生会认为水站诚信度在第二个周期中的后两周出现了滑落,为此学生会举行了“以诚信为本”主题教育活动,并得到活动之后一个周期的水站诚信度数据,如表2:

表2

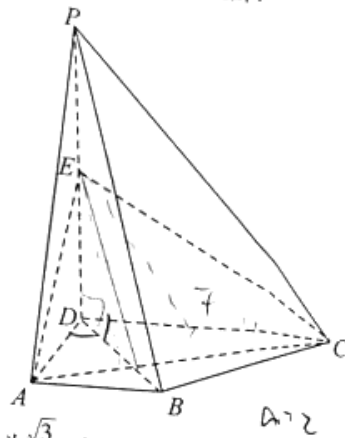
	第一周	第二周	第三周	第四周
第三个周期	85%	92%	95%	96%

请根据提供的数据,判断该主题教育活动是否有效,并根据已有数据说明理由.

18. (本小题满分14分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $DC = 2AB$, $AD \perp DC$, E 为棱 PD 的中点.

- (I) 求证: $CD \perp AE$;
 (II) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ;
 (III) 试判断 PB 与平面 AEC 是否平行? 并说明理由.



19. (本小题满分13分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 l 过椭圆 G 的右顶点 $A(2,0)$, 且交椭圆 G 于另一点 C .

- (I) 求椭圆 G 的标准方程;
 (II) 若以 AC 为直径的圆经过椭圆 G 的上顶点 B , 求直线 l 的方程.

20. (本小题满分14分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 在函数 $f(x)$ 零点处的切线方程;
 (II) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;
 (III) 若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 恰有两个不同的实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

求证: $x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1$.

$$\frac{\ln x + 1}{x} = a \Rightarrow (\ln x + 1)x = ax^2$$



海淀区高三年级第一学期期末练习

数学（文科）答案及评分标准

2017.1

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. C 2. B 3. D 4. C 5. C 6. A 7. B 8. C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9. $y=2x$ 或 $y=-2x$ (写出之一即可) 10. $-1, n^2-2n$ 11. $(1,0), \sqrt{2}$

12. 10 13. ①②③ 14. 乙

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

$$\text{由 } a_3 + a_4 = 6 \text{ 可得 } a_2q + a_2q^2 = 6$$

$$\text{又 } a_2 = 1, \text{ 所以 } q + q^2 = 6,$$

$$\text{解得 } q = 2 \text{ 或 } q = -3,$$

$$\text{因为 } a_n > 0 (n=1,2,3,\dots), \text{ 所以 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 0.$$

$$\text{所以 } q = 2,$$

$$\text{所以 } a_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a_n = 2^{n-2}, (n=1,2,3,\dots).$$

(II) 法 1: 由数列 $\{a_n - n\}$ 的前 n 项和 S_n 的意义可得

$$S_5 - S_4 = a_5 - 5,$$

$$\text{所以 } S_5 - S_4 = 2^{5-2} - 5 = 3 > 0,$$

$$\text{所以 } S_5 > S_4.$$

$$\text{法 2: } S_n = \frac{1}{2} \frac{(1-2^n)}{1-2} - \frac{n(n+1)}{2},$$



$$\text{所以 } S_4 = -\frac{5}{2},$$

$$\text{所以 } S_3 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } S_3 > S_4.$$

16. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由 $\cos x \neq 0$ 可得 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{(II) } f(x) &= \frac{\sin 2x + 2\cos^2 x}{\cos x} \\ &= \frac{2\sin x \cos x + 2\cos x}{\cos x} \\ &= 2\sin x + 2\cos x \\ &= 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

法 1: 函数 $y = \sin x$ 的增区间为 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$.

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\text{得 } 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{因为 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } 0 < x < \frac{\pi}{4},$$

所以, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上的单调递增区间为 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

法 2: 因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

因为函数 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

所以 $x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 单调递增

$$\text{此时 } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$



解：(I) 八周诚信水站诚信度的平均数为 $\bar{x} = \frac{95+98+92+88+94+94+83+80}{8 \times 100} = 90.5\%$.

(II) 表 1 中超过 91% 的数据共有 5 个，其中第一个周期有 3 个，分别记为 a_1 、 a_2 、 a_3 ，第二个周期有 2 个，分别记为 b_1 、 b_2 ，

从这 5 个数据中任取 2 个共有 10 种情况：

$$a_1a_2, a_1a_3, a_1b_1, a_1b_2,$$

$$a_2a_3, a_2b_1, a_2b_2,$$

$$a_3b_1, a_3b_2,$$

$$b_1b_2.$$

其中至少有 1 个数据出现在第二个周期有 7 种情况.

设至少有 1 个数据出现在第二个周期为事件 A .

$$\text{则 } P(A) = \frac{7}{10}.$$

(III) 有效

阐述理由

理由陈述的可能情况：

- ① 第三个周期水站诚信度的平均数 92% 高于第二个周期的诚信度平均数 87.75%；
- ② 第三个周期的四周的水站诚信度呈逐步上升趋势；
- ③ 第三个周期水站诚信度的平均数 92% 高于第一、二个周期的诚信度平均数 90.5%；
- ④ 12 周的整体诚信度平均数为 91%，高于前两个周期的诚信度的平均数 90.5%；

18. (本小题满分 14 分)

解：(I) 因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $DC \subset$ 底面 $ABCD$ ，

所以 $PD \perp DC$.

又 $AD \perp DC$ ， $AD \cap PD = D$ ，

故 $CD \perp$ 平面 PAD .

又 $AE \subset$ 平面 PAD ，

所以 $CD \perp AE$.

(II) 因为 $AB \parallel DC$ ， $CD \perp$ 平面 PAD ，

所以 $AB \perp$ 平面 PAD .

又因为 $AB \subset$ 平面 PAB ，

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .



故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$ ，单调递减区间是 $(1,+\infty)$ 。

(III) 由 (I) 可知 $f(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 上 $f(x)<0$ ，在 $(e^{-1},+\infty)$ 上 $f(x)>0$ 。

由 (II) 结论可知，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)=1$ ，

所以，方程 $f(x)=a$ 有两个不同的实根 x_1, x_2 时，必有 $0<a<1$ ，且

$$e^{-1} < x_1 < 1 < x_2,$$

法 1: 所以 $f(\frac{1}{a}) = a(1 - \ln a) > a = \ln x_2$,

由 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减可知 $x_2 > \frac{1}{a}$ 。

$$\text{所以 } x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1.$$

法 2: 由 $f(x)=a$ 可得 $\ln x + 1 = ax$ ，两个方程同解。

设 $g(x) = \ln x + 1 - ax$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$ ，

当 $0 < a < 1$ 时，由 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$ ，

所以 $g(x), g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0, \frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	极小	↘

所以 $x_1 < \frac{1}{a}$ ， $x_2 > \frac{1}{a}$ ，

$$\text{所以 } x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1.$$



扫描二维码，关注自主招生在线官方微信！

随时关注自主招生、高考、竞赛最新资讯！



解得 $x_C = 0$ 或 $x_C = -\frac{16}{17}$,

所以 $C(0,1)$ 或 $C(-\frac{16}{17}, -\frac{15}{17})$,

所以, 直线 l 方程为 $x+2y-2=0$ 或 $3x-10y-6=0$.

法2: 由题意, 直线 l 的斜率一定存在, 故设直线 l 为 $y=k(x-2)$,

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 可得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$.

所以 $\Delta > 0$, $x_C x_D = \frac{16k^2-4}{1+4k^2}$,

又 $x_D = 2$,

所以 $x_C = \frac{8k^2-2}{1+4k^2}$.

由题设可得 AC 为直径的圆经过点 $B(0,1)$ 等价于 $\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 0$.

所以 $\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 2x_C - y_C + 1 = 2x_C - k(x_C - 2) + 1 = 0$,

即 $\frac{20k^2+4k-3}{1+4k^2} = 0$.

解得 $k = -\frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{3}{10}$.

所以, 直线 l 方程为 $x+2y-2=0$ 或 $3x-10y-6=0$.

20. (本小题满分 14 分)

解: (I) 令 $f(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$.

所以, 函数 $f(x)$ 零点为 $\frac{1}{e}$.

由 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ 得 $f'(x) = \frac{1 \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$,

所以 $f'(\frac{1}{e}) = e^2$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在函数 $f(x)$ 零点处的切线方程为 $y - 0 = e^2(x - \frac{1}{e})$,

即 $y = e^2x - e$.

(II) 由函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ 得定义域为 $(0, +\infty)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

所以, 在区间 $(0,1)$ 上, $f'(x) > 0$; 在区间 $(1, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$.