

长郡、雅礼、一中、附中联合编审名校卷
2021 届高三月考试卷九(全国卷)
数学(理科)参考答案

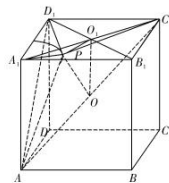
一、选择题

1. D 【解析】因为 $e = (1+ai) \cdot (1-i) = 1-i+ai-ai^2 = (1+a)+(a-1)i$ ，
则 $|z| = \sqrt{(1+a)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{2a^2+2} = 2$ ，解得 $a = \pm 1$ 。
2. D 【解析】由题意可得 $\frac{a-b}{a^2+b^2} = \frac{2x}{1+x^2}$ ，当 $x \leq 0$ 时，上式小于等于 0。
当 $x > 0$ 时，原式 $= \frac{2}{1+x} \leq 1$ ，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故最大值为 1。
3. A 【解析】圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3-m$ ，圆心 $(1, 2)$ ，半径 $r = \sqrt{3-m}$ ，
若直线 l 与圆 C 有公共点，
则圆心 $(1, 2)$ 到直线的距离 $d = \frac{|3-m|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{3-m}$ ，解得 $1 \leq m \leq 3$ ，
 $\{m | 1 \leq m \leq 3\} \subseteq \{m | 1 \leq m \leq 3\}$ ，所以“ $1 \leq m \leq 3$ ”是“直线 $l: x+y-m=0$ 和圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3-m$ 有公共点”的充分不必要条件。
4. B 【解析】对于 A，五年未发生贫困人口下降了 5.7-0.6=5.1 个百分点，故选项 A 错误；
对于 B， $(5575-551) \div 5575 \approx 90.1\% > 90\%$ ，
所以五年未发生贫困人口减少超过九成，故选项 B 正确；
对于 C，农村贫困人口减少的速度应看直线斜率的绝对值的大小，
由图中可知，2018-2019 年的斜率绝对值比 2017-2018 年的斜率绝对值小，故选项 C 错误；
对于 D，图中给出的图形中没有反映五年未发生贫困人口是否逐年减少，故选项 D 错误。
5. B 【解析】因为正实数 a, b 满足 $a+b=1$ ，
对于 A 选项，由基本不等式可得 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，A 选项正确；
对于 B 选项，由基本不等式可得 $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b} = \frac{1}{3} (3a+3b) \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b} \right)$
 $= \frac{1}{3} [(a+2b) + (2a+b)] \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b} \right) = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2a+b}{a+2b} + \frac{a+2b}{2a+b} \right)$
 $\geq \frac{1}{3} \left(2 + 2\sqrt{\frac{a+2b}{2a+b} \cdot \frac{2a+b}{a+2b}} \right) = \frac{4}{3}$ ，
当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，B 选项错误；
对于 C 选项， $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab \geq (a+b)^2 - 2 \times \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$ ，
当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，C 选项正确；
对于 D 选项， $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \leq \sqrt{a+b} + \sqrt{2} = 2$ ，
当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，D 选项正确。
6. D 【解析】由题意可知，若数列 $\{a_n\}$ 为“梦想数列”，则 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 0$ ，可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ，
所以，“梦想数列” $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

理科数学参考答案一

- 若正项数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ 为“梦想数列”，则 $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2b_n}$ ，所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ ，
即正项数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，
因为 $b_1+b_2+b_3=1$ ，因此 $b_4+b_5+b_6=2^3(b_1+b_2+b_3)=32$ 。
7. C 【解析】观察图像可知，函数的图像关于 y 轴对称，
对于 A 选项， $f(-x) = \frac{-\sin 5x}{2^x-2^{-x}} = \frac{\sin 5x}{2^{-x}-2^x} = f(x)$ ，为偶函数，
对于 B 选项， $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{2^x-2^{-x}} = \frac{\cos x}{2^x-2^{-x}} = -f(x)$ ，为奇函数，
对于 C 选项， $f(-x) = \frac{\cos(-5x)}{2^x-2^{-x}} = \frac{\cos 5x}{2^x-2^{-x}} = f(x)$ ，为偶函数，
对于 D 选项， $f(-x) = \frac{-\sin 5x}{2^x-2^{-x}} = -\frac{\sin 5x}{2^x-2^{-x}} = -f(x)$ ，为奇函数，
而选项 B, D 为奇函数，其图像关于原点对称，不合题意；
对选项 A 而言，当 $x \in (0, \frac{\pi}{5})$ 时，如取 $x = \frac{\pi}{6}$ ， $\because 2^{-\frac{\pi}{6}} - 2^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1-2^{\frac{\pi}{3}}}{2^{\frac{\pi}{6}}} < 0$ ，则有 $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{2^{-\frac{\pi}{6}}-2^{\frac{\pi}{6}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{-\frac{\pi}{6}}-2^{\frac{\pi}{6}}} \right) < 0$ ， $f(x) < 0$ ，不合题意。
8. D 【解析】将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，
得到函数 $g(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})$ 的图像，
因为 $g(x)$ 的图像关于 y 轴对称，所以 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，解得 $\omega = 6k+1$ ($k \in \mathbb{Z}$)，
又 $\omega > 0$ ，所以 $\omega \geq 1$ ，
当 $\omega=1$ 时， $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ ， $y=f(x)$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上只有一个极大值点，满足题意；
当 $\omega=7$ 时， $f(x) = \sin(7x + \frac{\pi}{3})$ ， $y=f(x)$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上极大值点的个数大于 2，
所以 $\omega \geq 7$ 时， $f(x)$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 上极大值点的个数大于 2，
所以 $\omega=1$ ，故 A 错误，C 错误；
又由 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$ ，
当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时，即 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称，D 正确；
当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 时， $\frac{5\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$ ，此时 $f(x)$ 是单调递减的，B 错误。
9. C 【解析】由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a ，得球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，
所以 $V_O = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \pi a^3$ ，解得 $a=4$ ，故 A 错误；
因为 $CC_1 \parallel AA_1$ ，所以 $\angle A_1AP$ 即直线 CC_1 与直线 AP 所成的角，
所以 $\sin \angle A_1AP = \frac{1}{3}$ ，所以 $\tan \angle A_1AP = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，
连接 A_1P ，因为 $AA_1=4$ ，所以 $A_1P = AA_1 \cdot \tan \angle A_1AP = \sqrt{2}$ ，
所以点 P 的运动轨迹是以 A_1 为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径的圆的四分之一，
所以点 P 运动轨迹的长度为 $\frac{1}{4} \times 2\pi \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$ ，故 B 错误；

理科数学参考答案二



由等体积法可知 $V_{P-PC_1D_1} = V_{A-PC_1D_1}$, 由点 P 的运动轨迹可知, P 到线段 C_1D_1 的距离 d 满足 $4 - \sqrt{2} \leq d \leq 4$, 所以 $\triangle PC_1D_1$ 的面积 $S \in [8 - 2\sqrt{2}, 8]$, 易知 $AA_1 \perp$ 平面 PC_1D_1 , 所以 $V_{P-PC_1D_1} = V_{A-PC_1D_1} = \frac{1}{3} AA_1 \cdot S_{\triangle PC_1D_1} \in [\frac{32-8\sqrt{2}}{3}, \frac{32}{3}]$, 故 C 正确;

设正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O_1 , 连接 O_1P, O_1O , 则 $OP_{\min} = \sqrt{O_1O^2 + O_1P_{\min}^2}$, 易知当 A_1, P, O_1 三点共线时, O_1P 取得最小值, 所以 $OP_{\min} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$, 故 D 错误.

10. A 【解析】设 $|FM| = a, |FN| = b$,

则根据抛物线性质和梯形中位线定理可知, $|PQ| = \frac{1}{2}(a+b)$,

而由向量数量积为 0 可知, F 在以 MN 为直径的圆上, $|MN| = 8$, 则 $a^2 + b^2 = 64$,

则 $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 4\sqrt{2}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

11. A 【解析】①: 由题设知, 圆的方程可写为 $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$, 所以圆上任一点 $P(x_0, y_0)$ 处的曲率半径为

$$R' = R^3 \left(\frac{\frac{x_0^2}{R^2} + \frac{y_0^2}{R^2}}{R^3} \right)^{\frac{3}{2}} = R^3 \left(\frac{1}{R^3} \right)^{\frac{3}{2}} = R, \text{ 正确};$$

②③: 由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 弯曲最大处为 $(\pm a, 0)$, 最小处为 $(0, \pm b)$,

所以在 $(\pm a, 0)$ 处有 $R = a^2 b^2 \left(\frac{a^2}{a^4} + \frac{0}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b^2}{a}$,

在 $(0, \pm b)$ 处有 $R = a^2 b^2 \left(\frac{0}{a^4} + \frac{b^2}{b^4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{b}$, 即 $R \in [\frac{b^2}{a}, \frac{a^2}{b}]$, 故②错误, ③正确;

④: 由题意, $(\frac{1}{2}, y_0)$ 处的曲率半径 $R = a^2 \left(\frac{1}{4a^4} + y_0^2 \right)^{\frac{3}{2}}$, 而 $y_0^2 = 1 - \frac{1}{4a^2}$,

所以 $R = a^2 \left(\frac{1}{4a^4} - \frac{1}{4a^2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{a^2}{4} + a^4 - \frac{a^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}$, 令 $f(a) = \frac{a^2}{4} + a^4 - \frac{a^2}{4}$,

则在 $a > 1$ 上有 $f'(a) = \frac{a}{2} (8a^4 + a^2 - 4) > 0$ 恒成立, 故 R 在 $a > 1$ 上随着 a 的增大而增大, 错误.

12. B 【解析】取 BC 的中点 M , 连接 AM, DM , 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 的外心分别为 F, E , 分别过点 F, E 作平面 ABC 和平面 BCD 的垂线交于点 O , 则点 O 为外接球球心.

由题意可知, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 都是边长为 4 的等边三角形.

$\because M$ 为 BC 的中点, $\therefore AM \perp BC$, 且 $AM = DM = 2\sqrt{3}$, 又 $AD = 2\sqrt{6}$,

$\therefore AM^2 + DM^2 = AD^2, \therefore AM \perp DM$.

$\because BC \cap DM = M, \therefore AM \perp$ 平面 BCD .

又 $AM \subset$ 平面 $ABC, \therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD ,

易得 $ME = MF = \frac{1}{3} AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}, BE = \frac{2}{3} DM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

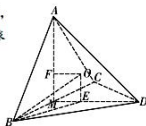
$\because AM \perp$ 平面 $BCD, OE \perp$ 平面 $BCD, \therefore OE \parallel AM$,

同理可得 $OF \parallel DM$, 则四边形 $OEMF$ 为菱形,

$\because AM \perp DM$, 菱形 $OEMF$ 为正方形,

$\therefore OE \perp$ 平面 $BCD, BE \subset$ 平面 $BCD, \therefore OE \perp BE$.

所以外接圆半径为 $OB = \sqrt{OE^2 + BE^2} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.



理科数学参考答案 - 3

因此, 四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi \times OB^2 = \frac{80}{3}\pi$.

二、填空题

13. 180 【解析】 $\because (1+x)^{10} = [2 - (1-x)]^{10}$,

$\therefore$ 其展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r 2^{10-r} C_{10}^r (1-x)^r$,

令 $r=8$ 得 $a_8 = 4C_{10}^8 = 180$.

14. $\frac{x}{72}$ 【解析】第 1 关收税金 $\frac{1}{2}x$, 第 2 关收税金 $\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2})x = \frac{x}{6} = \frac{x}{2 \times 3}$,

第 3 关收税金 $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6})x = \frac{x}{12} = \frac{x}{3 \times 4}$, ..., 第 8 关收税金 $\frac{x}{8 \times 9} = \frac{x}{72}$.

15. 2 【解析】连接 AF_2 , 由题意可得焦距为 $2c$, 椭圆的长轴长为 $2a$, 双曲线的实轴长为 $2m$, 则由双曲线的定义

可得 $|AF_1| - |AF_2| = 2m$, 由椭圆的定义可得 $|AF_1| + |AF_2| = 2a$,

所以 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 = 2m^2 + 2a^2$,

因为点 A 关于 C_2 的一条渐近线的对称点为 F_1 ,

所以双曲线的一条渐近线是线段 AF_1 的中垂线,

所以 $\angle F_1AF_2 = 90^\circ$, 所以 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 = 4c^2$,

所以 $2m^2 + 2a^2 = 4c^2$, 即 $m^2 + a^2 = 2c^2$,

所以 $\frac{m^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 2$.

所以 $\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} = 2$.

16. 535 【解析】四个盒子放球的个数如下

1 号盒子: $\{0, 1\}$,

2 号盒子: $\{0, 1, 2\}$,

3 号盒子: $\{0, 1, 2, 3\}$,

4 号盒子: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$,

结合由 5 个不同的小球全部放入盒子中, 不同组合下放法

$5 = 1 + 4; 3C_5^1$ 种;

$5 = 2 + 3; 4C_5^2$ 种;

$5 = 1 + 1 + 3; 6C_5^3$ 种;

$5 = 1 + 2 + 2; 6C_5^4$ 种;

$5 = 1 + 1 + 1 + 2; 3C_5^4$ 种.

$\therefore$ 5 个不同的小球放入四个盒子的方式共有 535 种.

三、解答题

17. 【解析】(1) 因为 $\sqrt{3} - 2b \sin C = 0$, 由正弦定理 $\sqrt{3} \sin C - 2b \sin C = 0$,

因为 $C \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 因为 $b = 3\sqrt{3}, a = 4$, 由 (1) 得 $B = \frac{\pi}{3}$.

所以根据余弦定理得 $b^2 = c^2 + a^2 - 2c \cdot a \cdot \cos B$,

化简整理为 $c^2 - 4c - 11 = 0$, 解得 $c = 2 + \sqrt{15}$.

理科数学参考答案 - 4

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}c \cdot \sin B = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ 12 分

18. 【解析】(1) 假设 $DE \parallel$ 平面 BFC .

因为 $AE \parallel CF$, $AE \subset$ 平面 BFC , 所以 $AE \parallel$ 平面 BFC .

又因为 $DE \parallel$ 平面 BFC , $AE \cap DE = E$, 所以平面 $ADE \parallel$ 平面 BFC .

根据面面平行的性质定理可得 $AD \parallel BC$, 所以 $\frac{BO}{OD} = \frac{OC}{OA}$.

因为 $AB = AD$, $AO \perp BD$, 所以 $BO = OD$, 这与 $OC = 2OA$ 矛盾.

所以 DE 不平行平面 BFC 5 分

(2) 以 O 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系.

则 $B(0, -\sqrt{3}, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $D(0, \sqrt{3}, 0)$, $F(2, 0, 1)$.

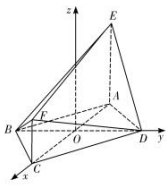
所以 $\vec{BC} = (2, \sqrt{3}, 0)$, $\vec{DB} = (0, -2\sqrt{3}, 0)$, $\vec{DF} = (2, -\sqrt{3}, 1)$.

设平面 BFD 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$.

由 $\begin{cases} \vec{DB} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \vec{DF} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} -2\sqrt{3}y = 0, \\ 2x - \sqrt{3}y + z = 0, \end{cases}$ 则 $y = 0$, 取 $x = 1, z = -2$.

所以平面 BFD 的一个法向量 $\mathbf{n} = (1, 0, -2)$.

直线 BC 与平面 BFD 所成的角的正弦值为 $\sin \theta = \frac{|\vec{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{BC}| |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{35}}{35}$ 12 分



19. 【解析】(1) 由题意 $B(\frac{p}{2}, 4)$,

代入 $y^2 = 2px$, 得 $p^2 = 16$,

$\therefore p = 4$.

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$ 4 分

(2) 当直线 m 的斜率不存在时, $k_1 + k_2 = 0$ 与题意不符, 所以直线 m 的斜率一定存在,

设直线 m 的方程为 $y = k(x - 1)$.

代入 $y^2 = 8x$ 中, 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 8)x + k^2 = 0$.

设 $D(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 8}{k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{k^2}{k^2} = 1. \end{cases}$

又易知 $A(-2, 0)$,

$\therefore k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2}$

$= \frac{k(x_1 - 1)}{x_1 + 2} + \frac{k(x_2 - 1)}{x_2 + 2}$

$= \frac{k[2x_1 x_2 + (x_1 + x_2) - 4]}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$

$= \frac{8k}{9k^2 + 16} = \frac{1}{3}$,

$\therefore k = \frac{4}{3}$.

所以直线 m 的方程为 $4x - 3y - 4 = 0$ 12 分

20. 【解析】(1) $g(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $g'(x) = \frac{1}{x} - k = \frac{1-kx}{x}$.

理科数学参考答案 - 5

当 $k > 0$ 时, 令 $g'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{k}$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{k}$.

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore g(x)$ 至多有两个零点.

$\because 0 < k < \frac{1}{e}$, $\therefore \frac{1}{k} > e$,

$\therefore g(\frac{1}{k}) = \ln \frac{1}{k} - 1 > 0$, $g(1) = -k < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, \frac{1}{k})$ 上有一个零点.

可证 $\ln x - x \leq -1 < 0$, $\ln x < x$,

从而 $g(\frac{1}{k^2}) = \ln \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} = 2 \ln \frac{1}{k} - \frac{1}{k} < 2 \times \frac{2}{k} - \frac{1}{k} = \frac{3}{k} > 0$.

又 $\because g(\frac{1}{k}) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$ 上有一个零点.

综上, 函数 $g(x)$ 有两个零点. 5 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + 1 - kx - 1 = \ln x - kx = g(x)$.

由 (1) 知 $g(x)$ 有两个零点, 设为 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < \frac{1}{k} < x_2$.

且 $\ln x_1 = kx_1$, $\ln x_2 = kx_2$.

又 $\because g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore$ 当 $0 < x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时, $g(x) < 0$; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $g(x) > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 (x_1, x_2) 上单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减. 7 分

故 x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点.

$\frac{f(x_1)}{x_1} = \ln x_1 - \frac{1}{2} kx_1 - 1 = \ln x_1 - \frac{1}{2} \ln x_1 - 1 = \frac{1}{2} \ln x_1 - 1$,

同理 $\frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{1}{2} \ln x_2 - 1$.

欲证 $\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} - 2 > -1$,

即证 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$.

$\because \ln x_1 = kx_1$, $\ln x_2 = kx_2$,

$\therefore \begin{cases} \ln x_2 + \ln x_1 = k(x_2 + x_1), \\ \ln x_2 - \ln x_1 = k(x_2 - x_1), \end{cases}$

$\therefore \frac{\ln x_2 + \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1}$, $\ln x_2 + \ln x_1 = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} (\ln x_2 - \ln x_1) = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1}$ 9 分

令 $t = \frac{x_2}{x_1} > 1$,

即证 $\frac{t+1}{t-1} \ln t > 2$,

即证 $\ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} > 0$.

记 $h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1}$, $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$.

理科数学参考答案 - 6

$\therefore h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(t) > h(1) = 0$,

命题得证. 12 分

21. 【解析】(1) 因为各随机“亮”出正反面, 所以甲、乙“亮”出正面的概率均可认为是 $\frac{1}{2}$.

设乙在此游戏中的收益为随机变量 ξ , 则 ξ 的可能取值为 $-2, 1, 3$,

所以可得乙的收益的分布列为

ξ	-2	1	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(\xi) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 0$ 4 分

(2) 假设甲以 $p(0 \leq p \leq 1)$ 的概率“亮”出正面, 乙以 $q(0 \leq q \leq 1)$ 的概率“亮”出正面, 甲收益的随机变量为 X , 乙收益的随机变量为 Y ,

此时甲的收益分布列为

X	2	-1	-3
P	$p(1-q) + q(1-p)$	$(1-p)(1-q)$	pq

所以甲的收益期望为 $E(X) = 2[p(1-q) + q(1-p)] - (1-p)(1-q) - 3pq = (3-8q)p + 3q - 1$ 6 分

同理可得乙的收益分布列为

Y	-2	1	3
P	$p(1-q) + q(1-p)$	$(1-p)(1-q)$	pq

所以乙的收益期望为 $E(Y) = -2[p(1-q) + q(1-p)] + (1-p)(1-q) + 3pq = (8p-3)q - 3p + 1$ 8 分

根据甲的收益期望, 可知乙的最优策略是“亮”出正面的概率为 $\frac{3}{8}$,

否则若 $\frac{3}{8} < q \leq 1$, 有 $3-8q < 0$, 甲的收益期望 $E(X) = (3-8q)p + 3q - 1$,

甲可以选择都“亮”出反面的策略, 即 $p=0$, 达到预期收益最大, 此时 $E(X) = 3q - 1 > \frac{1}{8}$.

若 $0 \leq q < \frac{3}{8}$, 则甲选择都“亮”出正面的策略, 即 $p=1$, 达到预期收益最大, $E(X) = 2-5q > \frac{1}{8}$.

同理, 可知甲的最优策略是“亮”出正面的概率为 $\frac{3}{8}$,

所以最终两人的决策为保持“亮”出正面的概率都为 $\frac{3}{8}$.

而当 $p=q=\frac{3}{8}$ 时, $E(X) = \frac{1}{8}$, $E(Y) = -\frac{1}{8}$,

所以此时游戏结束时两人都是最有利的, 但是规则不公平. 12 分

22. 【解析】(1) 曲线 C 的普通方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 化为极坐标方程为: $\frac{\rho^2 \cos^2 \theta}{4} + \rho^2 \sin^2 \theta = 1$.

理科数学参考答案一 7

即: $\rho^2 = \frac{4}{1+3 \sin^2 \theta}$,

直线 l 的极坐标方程为: $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1$, 即 $\sqrt{2} \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ 5 分

(2) 设点 $P(\rho_1, \theta_1)$, 则有 $\begin{cases} \rho_1^2 = \frac{4}{1+3 \sin^2 \theta_1} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} \rho_1 = \frac{4\sqrt{13}}{13} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$,

即 $P(\frac{4\sqrt{13}}{13}, \frac{\pi}{3})$,

设点 $Q(\rho_2, \theta_2)$, 则有 $\begin{cases} \sqrt{2} \rho_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{4}) = 1 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} \rho_2 = \sqrt{3} - 1 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$,

即 $Q(\sqrt{3}-1, \frac{\pi}{3})$,

$\therefore |PQ| = |\rho_1 - \rho_2| = \frac{4\sqrt{13}}{13} - 1 - \sqrt{3}$ 10 分

23. 【解析】(1) 不等式可化为: $f(x+1) + f(x-1) = |2x+3| + |2x-1| \leq 5$,

当 $x \leq -\frac{3}{2}$ 时, $-2x-3-2x+1 = -4x-2 \leq 5$, 解得: $x \geq -\frac{7}{4}$, $\therefore -\frac{7}{4} \leq x \leq -\frac{3}{2}$;

当 $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$ 时, $2x+3-2x+1 = 4 \leq 5$, $\therefore -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$;

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $2x+3+2x-1 = 4x+2 \leq 5$, 解得: $x \leq \frac{3}{4}$, $\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$;

综上所述: 实数 x 的取值范围为 $[-\frac{7}{4}, \frac{3}{4}]$ 5 分

(2) $f(x+a) + f(x-\frac{1}{a}) = |2x+2a+1| + |2x-\frac{2}{a}+1| \geq |(2x+2a+1) - (2x-\frac{2}{a}+1)|$

$= |2a + \frac{2}{a}|$ (当且仅当 $(2x+2a+1)(2x-\frac{2}{a}+1) \leq 0$ 时取等号),

又 $|2a + \frac{2}{a}| = 2(|a| + \frac{1}{|a|}) \geq 4\sqrt{|a| \cdot \frac{1}{|a|}} = 4$ (当且仅当 $|a| = \frac{1}{|a|}$, 即 $a = \pm 1$ 时取等号),

$\therefore f(x+a) + f(x-\frac{1}{a}) \geq 4$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》

