

本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效

3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足: $z(i+1)+i=1+3i$, 则 z 的虚部为

- A. $-\frac{i}{2}$ B. $\frac{i}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 3x - 4 < 0\}$, $B = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B$ 为

- A. $\{-1, 0, 2, 3\}$ B. $\{0, 2, 3\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{2, 3\}$

3. 已知向量 $a = (2, -1)$, $b = (1, 3)$, 则向量 $a+2b$ 在向量 a 方向上的投影向量为

- A. $(6, -3)$
B. $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$
C. $(\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5})$
D. $(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = 1$, 且 $a_{n+1} - a_n = 2a_n - 2a_{n-1} + 1 (n \geq 2)$, 则 $a_{2021} - 2a_{2022}$ 的值为

- A. 2 021 B. 2 022 C. 2 023 D. 2 024

5. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 T , 若 $f(T) = \frac{1}{2}$, 且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{7\pi}{3}$ 对称, 则 ω 的最小值为

- A. 3 B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{1}{7}$

6. 设 $a = \ln 2$, $b = \frac{2023}{2022} - \frac{\ln 2023}{\ln 2022}$, 则

- A. $a < b^2$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 则函数 $y = f(f(x)) - 1$ 的零点个数为

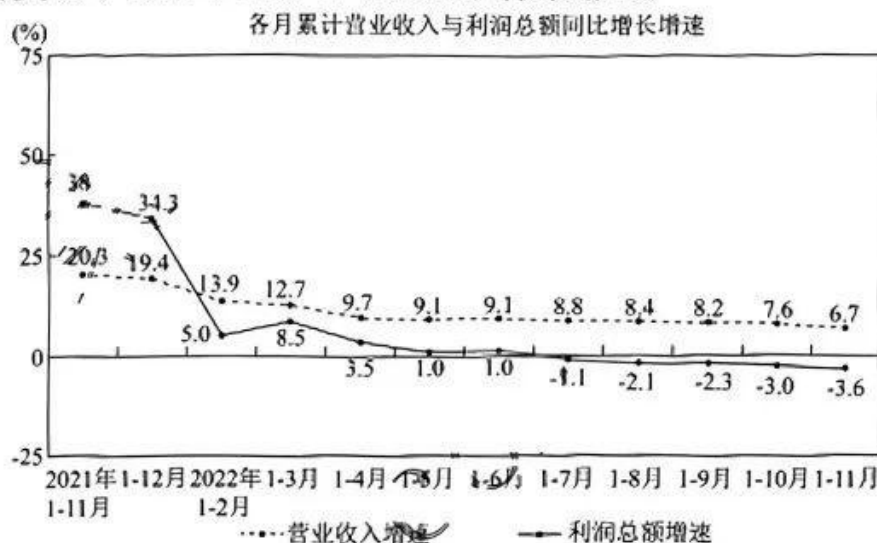
- A. 1 B. 3 C. 4 D. 5

8. 设 P 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 右支上的点, F_1, F_2 分别为 C 的左、右两个焦点, 若 $\angle F_1PO = \frac{1}{3} \angle F_1PF_2$ (O 为坐标原点), 且 $\cos \angle F_1PO = \frac{3}{4}$, 则 C 的离心率为

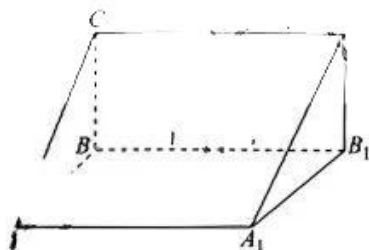
- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{69}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{79}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{83}}{2}$

求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 如图为国家统计局于 2022 年 12 月 27 日发布的有关数据, 则



- A. 营业收入增速的中位数为 9.4% B. 营业收入增速极差为 13.6%
C. 利润总额增速越来越小 D. 利润总额增速的平均数大于 6%
10. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 l 绕点 $P(-2, 1)$ 旋转, 点 Q 为 C 上的动点 (O 为坐标原点), 则
- A. 以 Q 为圆心, $|QF|$ 为半径的圆与直线 $x = -1$ 相切
B. 若直线 l 与抛物线有且只有一个公共点, 则这样的直线 l 有两条
C. 线段 PF 的垂直平分线方程为 $3x - y + 2 = 0$
D. 过点 F 的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|AB| = 4$, 则这样的直线有 3 条
11. 我国古代数学名著《九章算术》中将“底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱”称为“堑堵”. 现有一如图所示的“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$, 其中 $AB \perp BC$, 若 $BB_1 = AB = 2, BC = 1$, 则



- A. 该“堑堵”的体积为 2
B. 该“堑堵”外接球的表面积为 9π
C. 若点 P 在该“堑堵”上运动, 则 $|PA|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$
D. 该“堑堵”上, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称, $g(3+2x)$ 为奇函数, 则
- A. $f(-1) = 0$ B. $g(2023) + g(-2025) = 1$
C. $g(3) = 0$ D. $g(2023) = 0$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(ax+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^3 项的系数为 30, 则实数 a 的值为 _____.
14. 在某数学活动课上, 数学教师把一块三边长分别为 6, 8, 10 的三角板 ABC 放在直角坐标系中, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的方程可以为 _____ (写出其中一个符合条件的即可).

15. 已知 $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = 1$, 则 $\sin\left(\frac{7\pi}{6} - 2\alpha\right)$ 的值为_____.

16. 拓扑空间中满足一定条件的图象连续的函数 $f(x)$, 如果存在点 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 那么我们称函数 $f(x)$ 为“不动点”函数, 而称 x_0 为该函数的不动点. 类比给出新定义: 若不动点 x_0 满足 $f'(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的双重不动点. 则下列函数中, ① $f(x) = x^3 - x \sin x$; ② $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$; ③ $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$ 具有双重不动点的函数为_____. (将你认为正确的函数的代号填在横线上)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{1}{2} \sin 2B \cos C + \cos^2 B \sin C = \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{3}$, 点 D 为 AC 边的中点, 证明: $BD = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - 9}}{2}$.

18. (本小题满分 12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, 2S_n + 2S_{n-1} = a_n^2 + 3 (n \geq 2)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

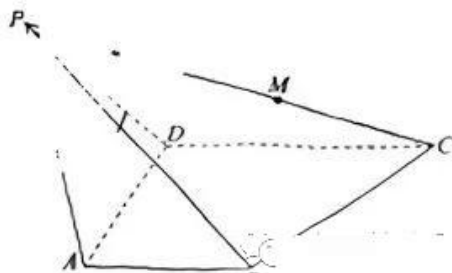
(2) 若 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, AD \perp AB, DC = \frac{1}{2} AB = 2AB = 2a, PA = PD$, 二面角 $P-AD-B$ 的大小为 135° , 点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{a}{2}$.

(1) 过点 P 是否存在直线 l 使直线 $l \parallel$ 平面 $ABCD$, 若存在, 作出该直线, 并写出作法与理由; 若不存在, 请说明理由.

(2) 若 $\vec{PM} = 2\vec{MQ}$, 求点 M 到平面 PAD 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

某商场在促销活动期间,规定凡是在该商场购买 500 元及以上的顾客可参与抽奖活动,活动规则如下:每个顾客在一个标有 1,2,3,4,5,6 的均匀圆盘上转动三次,若指针出现一次或两次指向“4”,则该顾客可获得商场返还购买金额的 30%;出现三次指向“4”,该顾客可获得商场返还购买金额的 50%;否则不返还金额.某顾客在此商场促销活动期间票据单上总购买金额为 800 元.

(1)求该顾客参与活动后恰好返还 240 元的概率;

(2)设该顾客参与活动后,最终支付商场的金额为 Y ,求 Y 的分布列与数学期望.(四舍五入取整数)

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 右顶点为 A ,上顶点为 B ,过 A, B 两点的直线平分圆

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ 的周长,且与坐标轴围成的三角形的面积为 $\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)若直线 $l: y = x + m$ 与 E 相交于 C, D 两点,且点 $M(1, 3m)$,当 $\triangle CDM$ 的面积最大时,求直线 l 的方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 + 2 (a \in \mathbb{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $a = -1$ 时,证明:函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1, x_2 且 $x_1 + x_2 > \sqrt{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线