沈阳市第120中学2023-2024学年度上学期

高三年级第一次质量监测

数学试题

满分：150分　时间：120分钟　命题人：董贵臣　佟艳丽　校对人：高越

一、单选题（本题共8小题，每小题5分，共40分）

1. 设集合 $M=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}\le 0\right.\right\}, N=\left\{x\left|x^2-2x<0\right.\right\}$，则 $M\cap N$ 为（　　）

A. $\{x|0<x<1\}$　　B. $\{x|0\le x<1\}$　　C. $\{x|0\le x<2\}$　　D. $\{x|0<x<2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】

化简集合 A，B，根据交集计算即可.

【详解】因为 $M=\left\{x\left|\frac{x}{x-1}\le 0\right.\right\}=[0,1), N=\left\{x\left|x^2-2x<0\right.\right\}=(0,2)$，

所以 $M\cap N=(0,1)$，

故选：A

2. 已知 $p:x^2-x<0$，那么命题 p 的一个必要条件是（　　）

A. $0<x<1$　　B. $-1<x<1$　　C. $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}<x<2$

【答案】B

【解析】

【分析】

首先解不等式 $x^2-x<0$，得到不等式的解，利用集合之间的关系，判断充分必要性，得到结果.

【详解】$x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1$，运用集合的知识易知，

A 中 $0<x<1$ 是 p 的充要条件；

B 中 $-1<x<1$ 是 p 的必要条件；

C 中 $\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$ 是 p 的充分条件；

D 中 $\frac{1}{2}<x<2$ 是 p 的既不充分也不必要条件.

故选：B.

【点睛】关键点点睛：该题考查的是有关充分必要条件的判段，正确解题的关键是理解充分必要条件的定义.

3. 给定函数 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-a(a\in\mathrm{R})$，若函数 $f(x)$ 恰有两个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a<-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$　　　　B. $a\geq 0$

C. $-\frac{1}{\mathrm{e}^2}<a<0$　　　　D. $a>-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】由函数与方程的思想将函数 $f(x)$ 恰有两个零点转化成函数 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ 与函数 $y=a$ 图象有两个交点，画出图像数形结合即可得 $-\frac{1}{\mathrm{e}^2}<a<0$.

【详解】若函数 $f(x)$ 恰有两个零点，即方程 $(x+1)\mathrm{e}^x=a$ 有两个不相等的实数根，

即函数 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ 与函数 $y=a$ 图象有两个交点，

易知 $g'(x)=\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=(x+2)\mathrm{e}^x$，

令 $g'(x)=0$，解得 $x=-2$，

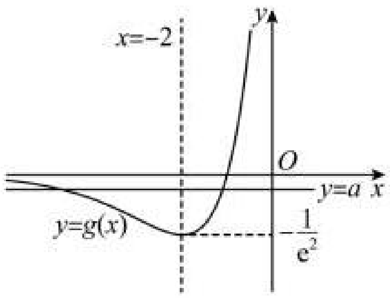
所以当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，

当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=-2$ 取得最小值 $g(-2)=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

易知当 $x=-1$ 时，$g(x)=0$，且 $x<-1$ 时 $g(x)<0$，

在同一坐标系下分别画出两函数图象，如下图所示：



由图可知当 $-\frac{1}{e^2}<a<0$ 时，函数 $g(x)=(x+1)e^x$ 与函数 $y=a$ 图象有两个交点.

故选：C

4. 若函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图像向左平移 φ（$\varphi>0$）个单位，所得的图像关于 y 轴对称，则当 φ 最小时，$\tan\varphi=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平移变换得到解析式后,利用所得的图像关于 y 轴对称列式,再求最小值.

【详解】将函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图像向左平移 φ（$\varphi>0$）个单位后，得到函数 $y=\sin[2(x+\varphi)-\frac{\pi}{6}]=\sin(2x+2\varphi-\frac{\pi}{6})$,

因为其图像关于 y 轴对称,所以 $2\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$,即 $\varphi=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$, $k\in Z$,

因为 $\varphi>0$,所以 $k=0$ 时, φ 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$,此时 $\tan\varphi=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

故选 B.

【点睛】本题考查了三角函数图像的平移变换以及对称轴,属于中档题.

5. 函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，其导函数为 $f'(x)$，若对任意的正实数 x，都有 $xf'(x)+2f(x)>0$ 恒成立，且 $f(\sqrt{2})=1$，则使 $x^2f(x)<2$ 成立的实数 x 的集合为（　　）

A. $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　B. $(-\infty,\sqrt{2})$

C. $(\sqrt{2},+\infty)$　　D. $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $xf'(x)+2f(x)>0$ 的特征，构造 $h(x)=x^2f(x)$，研究其单性与奇偶性，又 $f(\sqrt{2})=1$，

得到$h\left(\sqrt{2}\right)=2f\left(\sqrt{2}\right)=2$，将$x^2f(x)<2$，转化为$h(x)<h\left(\sqrt{2}\right)$，利用单调性与奇偶性求解.

【详解】设$h(x)=x^2f(x)$，

所以$h'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=x\left(xf'(x)+2f(x)\right)$，

因为$x>0$时，都有$xf'(x)+2f(x)>0$恒成立，

所以$h'(x)>0$，

所以$h(x)=x^2f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，

又因为函数$f(x)$是定义在$\boldsymbol{R}$上的偶函数

所以$h(x)=x^2f(x)$也是定义在$\boldsymbol{R}$上的偶函数

所以$h(x)=x^2f(x)$在$(-\infty,0)$上是减函数，

又因为$f\left(\sqrt{2}\right)=1$，

所以$h\left(\sqrt{2}\right)=2f\left(\sqrt{2}\right)=2$，

又因为$x^2f(x)<2$，

即$h(x)<h\left(\sqrt{2}\right)$.

所以$|x|<\sqrt{2}\Rightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

故选：A

6. 已知$\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{14}}{6}(0<\alpha<\pi)$，则$\frac{\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$（　　）

A. $-\frac{2\sqrt{7}}{21}$　　B. $-\frac{2\sqrt{11}}{33}$　　C. $\frac{2\sqrt{11}}{33}$　　D. $\frac{2\sqrt{7}}{21}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{9}$，再求出$\sin\alpha+\cos\alpha>0$，再求$\sin\alpha+\cos\alpha$的值即得解.

【详解】$\because\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{14}}{6}$，$\therefore\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$，

将两边同时平方得：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{7}{9}$，

则$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{1}{9}>0$，

$\because 0<\alpha<\pi$，$\therefore \sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，

$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{11}}{3}$，

$\therefore \dfrac{\cos(2\alpha+\frac{3\pi}{2})}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{11}}{3}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{33}$，

故选：C

【点睛】方法点睛：三角恒等变换常用的方法：三看（看角看名看式）三变（变角变名变式）. 要根据已知灵活选用方法求解.

7. 已知$f(x)$是定义在R 上的偶函数，且当$x>0$时$f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$，若对任意实数$t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，都有$f(t+a)-f(t-1)>0$恒成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$　　　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　　　D. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】探讨给定函数在$(0,+\infty)$上的单调性，结合偶函数的性质脱去法则“f”，再借助一次函数的性质求解作答.

【详解】依题意，当$x>0$时，$f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}=1-\dfrac{3}{x+1}$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$f(x)$是定义在R 上的偶函数，即有$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，且它的图像关于y轴对称，

对$\forall t\in[\dfrac{1}{2},2]$，$f(t+a)-f(t-1)>0\Leftrightarrow f(t+a)>f(t-1)\Leftrightarrow f(|t+a|)>f(|t-1|)$，

于是得$|t+a|>|t-1|$，两边平方整理得$(2a+2)t+a^2-1>0$，令$g(t)=(2a+2)t+a^2-1$，

因此$\begin{cases} g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(2a+2)+a^2-1>0 \\ g(2)=2(2a+2)+a^2-1>0 \end{cases}$，解得$a<-3$或$a>0$，

所以实数a的取值范围是$(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$.

故选：A

8. 已知函数 $f(x)$ 在定义域上是单调函数，且 $f[f(x)-2020^x]=2021$，当 $g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-kx$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上与 $f(x)$ 在 R 上的单调性相同时，实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,-\sqrt{3}]$　　C. $[-1,\sqrt{3}]$　　D. $[\sqrt{3},+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】

依题意可得，$f(x)-2020^x$ 为定值，设 $f(x)-2020^x=t$，则 $f(x)=t+2020^x$，不难得到 $f(x)$ 在 R 上为增函数，再对 $g(x)$ 求导，利用三角恒等变换将 $g'(x)$ 化简为 $g'(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-k$，又 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上与 $f(x)$ 在 R 上单调性相同，所以 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)\geq 0$ 恒成立，即 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-k\geq 0$ 恒成立，最后根据三角函数的性质求出参数 k 的取值范围；

【详解】解：因为函数 $f(x)$ 在定义域上是单调函数，则 $y=f'(x)$ 没有零点，所以 $y=f'(x)>0$ 或 $y=f'(x)<0$ 恒成立，

又 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f[f(x)-2020^x]=2021$，所以 $f(x)-2020^x$ 为定值，设 $f(x)-2020^x=t$，则 $f(x)=t+2020^x$，

不难得到 $f(x)$ 在 R 上为增函数，因为 $g(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-kx$，

所以 $g'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x-k=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-k$，

又 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上与 $f(x)$ 在 R 上单调性相同，所以 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g'(x)\geq 0$ 恒成立，即

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-k\geq 0$ 恒成立，

因为 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$

则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\sqrt{3},2\right]$

所以 $k\leq-\sqrt{3}$

故选：B

【点睛】本题考查利用导数研究函数的单调性，三角函数的性质的应用，属于中档题.

二、多选题（本题共 4 小题，共 20 分，每题选项全对给 5 分，少选或漏选给 2 分，错选、多选和不选给 0 分）

9. 已知函数 $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$，则（　　）

A. $f(x)$的定义域为$[-3，1]$　　　　B. $f(x)$为非奇非偶函数

C. $f(x)$的最大值为 8　　　　D. $f(x)$的最小值为 2

【答案】ABD

【解析】

【分析】

先求得函数定义域为$[-3,1]$，AB 对，对表达式同时平方，求得 $f^2(x)$ 的范围，进一步判断 $f(x)$ 范围即可

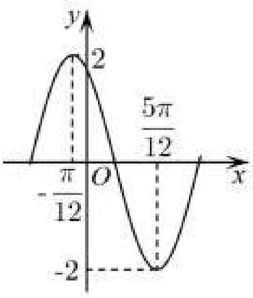
【详解】由题设可得函数的定义域为$[-3,1]$，则选项 AB 正确；

$f^2(x)=4+2\times\sqrt{-x^2-2x+3}=4+2\times\sqrt{4-(x+1)^2}$，而 $0\le\sqrt{4-(x+1)^2}\le 2$，即 $4\le f^2(x)\le 8$，$\because f(x)>0$，

$\therefore 2\le f(x)\le 2\sqrt{2}$，$\therefore f(x)$的最大值为 $2\sqrt{2}$，最小值为 2，则选项 C 错误，D 正确.

故选：ABD．

10. 已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是（　　）



A. $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$

D. 函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上无最小值

【答案】BC

【解析】

【分析】由图可知$A=2$，$\omega=2$，进而结合$\left(-\frac{\pi}{12},2\right)$待定系数得$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，再依次讨论各选项即可得答案.

【详解】解：由图可知，$A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{2}$，

所以$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，即$\omega=2$，所以$f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，

再将$\left(-\frac{\pi}{12},2\right)$代入得$2=2\cos\left[2\times\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi\right]$，即$1=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$，

所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi,k\in Z$，即$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$，

因为$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，即$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故A选项错误；

令$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，即函数的对称中心为$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0\right)k\in Z$，所以当$k=0$时，函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称，故B正确；

因为$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)$，即函数$f(x)$关于$x=\frac{5\pi}{12}$对称，由函数图像易知正确，故C正确；

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以当$2x+\frac{\pi}{6}=\pi$，即$x=\frac{5\pi}{12}$时函数$f(x)$取得最小值$-2$，故D错误.

故选：BC

11. 已知正实数x,y满足$2x+y=3$，则（　　）

A. $xy\le\frac{9}{8}$　　　　B. $4^x+2^y\ge4\sqrt{2}$

C. $x^2+\frac{y^2}{4}\le\frac{9}{8}$　　　　D. $\frac{x}{y}+\frac{1}{x}\ge\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】由基本不等式，即可结合选项逐一求解.

【详解】因为 $2x+y=3$，且 x,y 均为正实数，所以由基本不等式得 $2x+y=3\geq 2\sqrt{2xy}$，即 $xy\leq\frac{9}{8}$，$4^x+2^y\geq 2\sqrt{4^x\times 2^y}=2\sqrt{2^{2x+y}}=4\sqrt{2}$，当且仅当 $2x=y$ 时等号成立，A,B 正确；

由不等式 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$，得 $\sqrt{\frac{4x^2+y^2}{2}}\geq\frac{2x+y}{2}$，所以 $4x^2+y^2\geq\frac{(2x+y)^2}{2}$，即 $x^2+\frac{y^2}{4}\geq\frac{9}{8}$，当且仅当 $2x=y$ 时等号成立，C错误（或 $x^2+\frac{y^2}{4}=\frac{1}{4}(4x^2+y^2)=\frac{1}{4}\left[(3-y)^2+y^2\right]=\frac{1}{4}\left[2\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right]\geq\frac{9}{8}$）；

因为 $2x+y=3$，所以 $\frac{x}{y}+\frac{1}{x}=\frac{x}{y}+\frac{1}{3x}(2x+y)=\frac{2}{3}+\frac{x}{y}+\frac{y}{3x}\geq\frac{2}{3}+2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{3x}}=\frac{2}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $y=\sqrt{3}x$ 时等号成立，D 正确.

故选：ABD

12. 已知直线 $y=-x+2$ 分别与函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象交于点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则下列结论正确的是

A. $x_1+x_2=2$

B. $e^{x_1}+e^{x_2}>2e$

C. $x_1\ln x_2+x_2\ln x_1<0$

D. $x_1x_2>\frac{\sqrt{e}}{2}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据互为反函数的性质可得 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 的中点坐标为 $(1,1)$，从而可判断 A；利用基本不等式可判断 B、D；利用零点存在性定理以及对数的运算性质可判断 C.

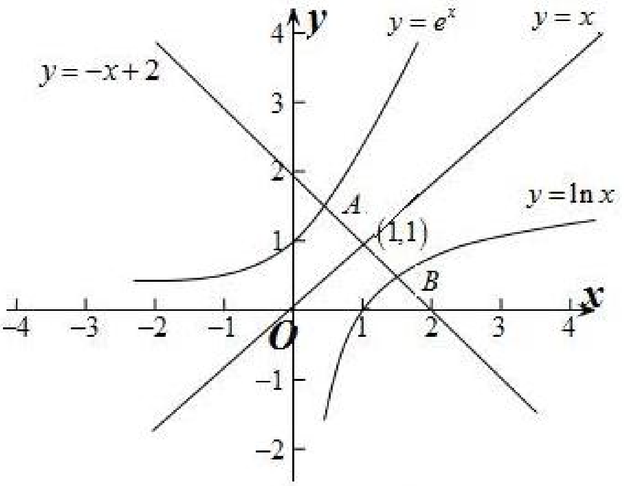
【详解】函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数，

则 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象关于 $y=x$ 对称，

将 $y=-x+2$ 与 $y=x$ 联立，则 $x=1,y=1$，

由直线 $y=-x+2$ 分别与函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象交于点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

作出函数图像：



则 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 的中点坐标为 $(1,1)$，

对于 A，由 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=1$，解得 $x_1+x_2=2$，故 A 正确；

对于 B，$e^{x_1}+e^{x_2}\ge 2\sqrt{e^{x_1}\cdot e^{x_2}}=2\sqrt{e^{x_1+x_2}}=2\sqrt{e^2}=2e$，

因为 $x_1\ne x_2$，即等号不成立，所以 $e^{x_1}+e^{x_2}>2e$，故 B 正确；

对于 C，将 $y=-x+2$ 与 $y=e^x$ 联立可得 $-x+2=e^x$，即 $e^x+x-2=0$，

设 $f(x)=e^x+x-2$，且函数为单调递增函数，

$\because f(0)=1+0-2=-1<0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}-2=e^{\frac{1}{2}}-\dfrac{3}{2}>0$，

故函数的零点在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上，即 $0<x_1<\dfrac{1}{2}$，由 $x_1+x_2=2$，则 $1<x_2<2$，

$x_1\ln x_2+x_2\ln x_1=x_1\ln x_2-x_2\ln\dfrac{1}{x_1}$

$<x_1\ln x_2-x_2\ln x_2=(x_1-x_2)\ln x_2<0$，故 C 正确；

对于 D，由 $x_1+x_2\ge 2\sqrt{x_1x_2}$，解得 $x_1x_2\le 1$，

由于 $x_1\ne x_2$，则 $x_1x_2<1$，故 D 错误；

故选：ABC

【点睛】本题考查了互为反函数的性质、基本不等式的应用、零点存在性定理以及对数的运算性质，考查了数形结合的思想，属于难题.

三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 若命题：“$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使$mx_0^2-mx_0+1\le 0$”是假命题，则实数m的取值范围为______.

【答案】$[0,4)$

【解析】

【分析】根据特称命题的否定，结合二次函数的性质，可得答案.

【详解】由题意可知：命题：$\forall x\in\mathrm{R}$，$mx^2-mx+1>0$是真命题，

①当$m=0$时，结论显然成立；

②当$m\ne 0$时，则$\begin{cases}m>0\\ \Delta=m^2-4m<0\end{cases}$，解得$0<m<4$；

故答案为：$[0,4)$.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+12,x\le 1\\ x+\dfrac{4}{x}+a,x>1\end{cases}$，若$f(x)$的最小值为$f(1)$，则实数$a$的取值范围是________.

【答案】$[3,+\infty)$

【解析】

【分析】分别讨论$x>1$和$x\le 1$时，结合基本不等式和二次函数的单调性可得$f(x)$的最小值，解不等式可得所求范围.

【详解】函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+12,x\le 1\\ x+\dfrac{4}{x}+a,x>1\end{cases}$，可得$x>1$时，$f(x)=x+\dfrac{4}{x}+a\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}+a=4+a$，当且仅当$x=2$时，$f(x)$取得最小值$4+a$，

由$x\le 1$时，$f(x)=(x-a)^2+12-a^2$，

若$a\ge 1$时，$f(x)$在$(-\infty,1]$递减，可得$f(x)\ge f(1)=13-2a$，

由于$f(x)$的最小值为$f(1)$，所以$13-2a\le 4+a$，解得$a\ge 3$；

若$a<1$时，$f(x)$在$x=a$处取得最小值与题意矛盾，故舍去；

综上得实数a的取值范围是$[3,+\infty)$，

故答案为：$[3,+\infty)$.

【点睛】本题主要考查分段函数的最值求法，考查二次函数的单调性和运用，以及不等式的解法，属于中档题.

15. 我们比较熟悉的网络新词，有"$yyds$"、"内卷"、"躺平"等，定义方程$f(x)=f'(x)$的实数根x叫做函数$f(x)$的"躺平点".若函数$g(x)=e^x-x$，$h(x)=\ln x$，$\varphi(x)=2023x+2023$的"躺平点"分别为a，b，c，则a，b，c的大小关系为______.

【答案】$b>a>c$

【解析】

【分析】根据"躺平点"新定义，可解得$a=1, c=0$，利用零点存在定理可得$b\in(1,\mathrm{e})$,即可得出结论.

【详解】根据"躺平点"定义可得$g(a)=g'(a)$，又$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$；

所以$\mathrm{e}^a-a=\mathrm{e}^a-1$，解得$a=1$；

同理$h'(x)=\dfrac{1}{x}$，即$\ln b=\dfrac{1}{b}$；

令$m(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$，则$m'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$，

即$m(x)$为$(0,+\infty)$上的单调递增函数，

又$m(1)=-1<0, m(\mathrm{e})=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$，

所以$m(x)$在$(1,\mathrm{e})$有唯一零点，即$b\in(1,\mathrm{e})$；

易知$\varphi'(x)=2023$，即$\varphi(c)=2023c+2023=\varphi'(c)=2023$，

解得$c=0$；

因此可得$b>a>c$.

故答案为：$b>a>c$.

16. 对于给定的区间D，如果存在一个正的常数T，使得$\forall x\in D$都有$x+T\in D$，且$f(x+T)>f(x)$对$\forall x\in D$恒成立，那么称函数$f(x)$为D上的"T增函数".已知函数$g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$，若函数$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$是$(-1,+\infty)$上的"3增函数"，则实数$m$的取值范围是______.

【答案】$(-3,+\infty)$

【解析】

【分析】先分析出$u(x)=x^2+m|x|$为偶函数，$g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$为奇函数，所以$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$

为偶函数，且 $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 在 R 上单调递增，分 $m\geq 0$，$-2\leq m<0$ 与 $m<-2$ 三种情况，结合函数的单调性和对称性，得到实数 m 的取值范围.

【详解】设 $u(x)=x^2+m|x|$，则 $u(x)=x^2+m|x|$ 定义域为 R，

且 $u(-x)=(-x)^2+m|-x|=x^2+m|x|=u(x)$，故 $u(x)=x^2+m|x|$ 为偶函数，

$g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 定义域为 R，且 $g(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-g(x)$，

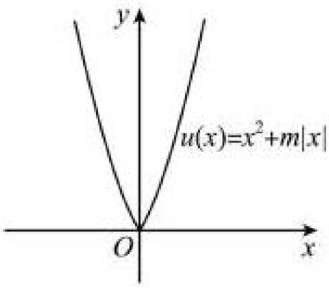
故 $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 为奇函数，

所以 $h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$ 为偶函数，

且 $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ 在 R 上单调递增，

若 $m\geq 0$，则画出 $u(x)=x^2+m|x|$ 的图象如下：

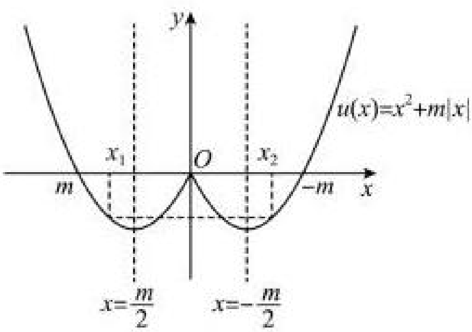


即 $u(x)=x^2+m|x|$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由复合函数单调性满足“同增异减”，可知：$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$ 为偶函数，所以有 $h(x+3)>h(x)$，满足 3 增函数，

若 $-2\leq m<0$，画出 $u(x)=x^2+m|x|$ 的图象如下：



则$u(x)=x^2+m|x|$在$\left(-1,\frac{m}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{m}{2},0\right)$上单调递增,在$\left(0,-\frac{m}{2}\right)$上单调递减,在$\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$上单调递增，

由复合函数单调性满足"同增异减"，可知：$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$在$\left(-1,\frac{m}{2}\right)$单调递减，在$\left(\frac{m}{2},0\right)$上单调递增，在$\left(0,-\frac{m}{2}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$上单调递增，

因为$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$为偶函数，

所以只需任取$x_1\in\left(-1,\frac{m}{2}\right)$，使得$h(x_1+3)>h(x_1)$，

由对称性可知，存在$x_2=-x_1\in\left(-\frac{m}{2},1\right)$，使得$h(x_2)=h(x_1)$，且$x_2-x_1<2$，

故满足$h(x_1+3)>h(x_1)$，故满足 3 增函数，

若$m<-2$时，画出$u(x)=x^2+m|x|$的图象如下：

则$u(x)=x^2+m|x|$在$(-1,0)$上单调递增，在$\left(0,-\frac{m}{2}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$上单调递增，

由复合函数单调性满足"同增异减"，可知：$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$在$(-1,0)$上单调递增，在$\left(0,-\frac{m}{2}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{m}{2},+\infty\right)$上单调递增，

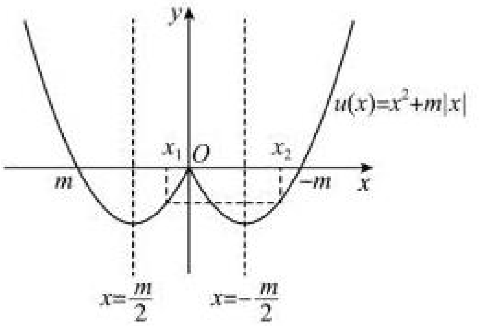
因为$h(x)=g\left(x^2+m|x|\right)$为偶函数，

故只需满足任取$x_1\in(-1,0)$，使得$h(x_1+3)>h(x_1)$，

由对称性可知：存在$x_2=x_1-m$，使得$h(x_2)=h(x_1)$，

所以要满足$x_1+3>x_2=x_1-m$，结合$m<-2$，解得：$-3<m<-2$，

综上：实数m的取值范围是$(-3,+\infty)$.



故答案为：$(-3,+\infty)$.

【点睛】复合函数的单调性，先考虑函数的定义域，再拆分为内层函数和外层函数，利用同增异减来判断复合函数的单调性；

复合函数的奇偶性，先考虑函数定义域是否关于原点对称，再拆分为内层函数和外层函数，利用"内偶则偶，内奇同外"进行判断，即若内层函数为偶函数，则复合函数为偶函数，若内层函数为奇函数，则复合函数的奇偶性取决于外层函数的奇偶性，若外层函数为奇函数，则复合函数为奇函数，若外层函数为偶函数，则复合函数为偶函数.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分）

17. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=4$，$S_n=\frac{a_{n+1}-4}{3}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记数列$b_n=(n+1)a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】（1）$a_n=4^n$；

（2）$T_n=\frac{(3n+2)\cdot 4^{n+1}-8}{9}$.

【解析】

【分析】（1）利用递推关系可求得$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=4$，再得到$a_1, a_2$关系后即可证得数列$\{a_n\}$为等比数列，由此可得通项公式；

（2）由（1）可得b_n，利用错位相减法可求得结果.

【小问 1 详解】

由$S_n=\frac{a_{n+1}-4}{3}$得：$S_{n+1}=\frac{a_{n+2}-4}{3}$，两式相减得：$a_{n+1}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3}$即$a_{n+2}=4a_{n+1}$

由$a_1=4$，$S_1=\dfrac{a_2-4}{3}$得：$a_2=16$，故$a_n\neq 0$，且，故$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=4$且$\dfrac{a_2}{a_1}=4$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以4为首项，4为公比的等比数列，$\therefore a_n=4\times 4^{n-1}=4^n$；

【小问2详解】

由（1）可得：$b_n=(n+1)\cdot 4^n$，

$\therefore T_n=2\times 4^1+3\times 4^2+4\times 4^3+\cdots+n\cdot 4^{n-1}+(n+1)\cdot 4^n$，

$4T_n=2\times 4^2+3\times 4^3+4\times 4^4+\cdots+n\cdot 4^n+(n+1)\cdot 4^{n+1}$，

两式作差得：

$$-3T_n=8-(n+1)\cdot 4^{n+1}+\left(4^2+4^3+\cdots+4^n\right)=8-(n+1)\cdot 4^{n+1}+\frac{4^2\left(1-4^{n-1}\right)}{1-4}=8-(n+1)\cdot 4^{n+1}+\frac{4^{n+1}}{3}-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{8-(3n+2)\cdot 4^{n+1}}{3},$$

$$\therefore T_n=\frac{(3n+2)\cdot 4^{n+1}-8}{9}.$$

18. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x\cdot\ln x$.

（1）求曲线$y=f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线方程；

（2）设$g(x)=f'(x)$，讨论函数$g(x)$在$[1,+\infty)$上的单调性；

【答案】（1）$\mathrm{e}x-y-\mathrm{e}=0$；

（2）$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增.

【解析】

【分析】（1）利用导数的几何意义即得；

（2）利用函数的单调性与导数符号之间的关系可得出结论.

【小问1详解】

因为$f(x)=\mathrm{e}^x\cdot\ln x$，

所以$f(1)=0$，即切点坐标为$(1,0)$，

又$f'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，

$\therefore$切线斜率$k=f'(1)=\mathrm{e}$

$\therefore$切线方程为$y=\mathrm{e}(x-1)$，即$\mathrm{e}x-y-\mathrm{e}=0$；

【小问 2 详解】

因为$g(x)=f'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

所以$g'(x)=\mathrm{e}^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-1}{x^2}\right)$，

令$h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-1}{x^2}$，

则$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x-2}{x^3}=\dfrac{x^2-2x+2}{x^3}=\dfrac{(x-1)^2+1}{x^3}>0$，

$\therefore h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore h(x)\geq h(1)=1$，

$\therefore g'(x)>0$在$[1,+\infty)$上恒成立，

$\therefore g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增.

19. 在$\triangle ABC$中，已知$\dfrac{1+\cos 2B}{\cos A\cdot\cos B}=\dfrac{4\sin B}{\sin A}$.

（1）求$\dfrac{\tan A}{\tan B}$的值；

（2）求$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$的最小值.

【答案】（1）2　　（2）$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

【解析】

【分析】（1）利用二倍角余弦公式和同角三角函数关系对题给条件化简即可得到$\dfrac{\tan A}{\tan B}$的值；

（2）利用（1）的结论和均值定理即可求得$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$的最小值.

【小问 1 详解】

在$\triangle ABC$中，因为$\dfrac{1+\cos 2B}{\cos A\cdot\cos B}=\dfrac{4\sin B}{\sin A}$，

所以$\dfrac{2\cos^2 B}{\cos A\cdot\cos B}=\dfrac{4\sin B}{\sin A}$，即$\dfrac{2\cos B}{\cos A}=\dfrac{4\sin B}{\sin A}$，

即$2\cos B\sin A=4\cos A\sin B$，即$\dfrac{\tan A}{\tan B}=2$；

【小问2详解】

在$\triangle ABC$中，$\tan A=2\tan B$，

则A、B均为锐角，则$\tan B>0$；

因为$C=\pi-A-B$，所以

$\tan C=\tan\left(\pi-A-B\right)=-\tan\left(A+B\right)$

$=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-\dfrac{3\tan B}{1-2\tan^2 B}$；

故$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{1}{2\tan B}+\dfrac{1}{\tan B}-\dfrac{1-2\tan^2 B}{3\tan B}$

$=\dfrac{7+4\tan^2 B}{6\tan B}=\dfrac{7}{6\tan B}+\dfrac{2\tan B}{3}\geq 2\sqrt{\dfrac{7}{6\tan B}\cdot\dfrac{2\tan B}{3}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$，

（当且仅当$\tan B=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$时取等号）

所以$\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$的最小值为$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$．

20. 已知函数$f(x)=\sin^2\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\dfrac{1}{2}(\omega>0)$，$y=f(x)$的图象与直线$y=2$相交，且两相邻交点之间的距离为$\pi$.

（1）求$f(x)$的解析式，并求$f(x)$的单调区间；

（2）已知函数$g(x)=m\cos(x+\dfrac{\pi}{3})-m+2$，若对任意$x_1,x_2\in[0,\pi]$，均有$f(x_1)\geqslant g(x_2)$，求$m$的取值范围.

【答案】（1）$y=1-2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$，$[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2\pi}{3}](k\in Z)$ （2）$k\geq 4$

【解析】

【详解】分析：（1）利用二倍角的正弦公式、二倍角的余弦公式以及两角和与差的正弦公式将函数$f\left(x\right)$化为$1-2\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，利用正弦函数的周期公式可得$\omega$的值，利用正弦函数的单调性解不等式，可得到函数$f\left(x\right)$的递增区间；(2)对任意$x_1,x_2\in\left[0,\pi\right]$,均有$f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)$,等价于$f\left(x\right)$的最小值不小于$g\left(x\right)$的最大值，即$0\geq-\dfrac{1}{2}m+2$或$0\geq-2m+2$，由此求得$m$的取值范围.

详解：(1)

$f(x)=\sin^2\omega x-\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\frac{1}{2}$

$=\frac{1-\cos 2\omega x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}$

$=1-\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$..............................

与直线 y=2 的图象的两相邻交点之间的距离为 π.

则 T= π 所以 ω=1

$\therefore f(x)=1-\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

单调增区间$[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}](k\in Z)$

(2)由 $x_1\in[0,\pi]$，得 $f(x_1)\in[0,2]$

$x_2\in[0,\pi]$，当 $m\geq 0$时，$g(x_2)\in[-2m+2,-\frac{1}{2}m+2]$，要使 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 恒成立，

只需 $0\geq -\frac{1}{2}m+2$，解得 $m\geq 4$

当 $m<0$时，$g(x_2)\in[-\frac{1}{2}m+2,-2m+2]$，要使 $f(x_1)\geq g(x_2)$ 恒成立，

只需 $0\geq -2m+2$，矛盾.

综上 m 的取值范围是 $m\geq 4$

点睛：以三角恒等变换为手段，对三角函数恒等变换，进行考查三角函数的图象与性质是近几年高考考查的一类热点问题，一般难度不大，但综合性较强.解答这类问题，两角和与差的正余弦公式、诱导公式以及二倍角公一定要熟练掌握并灵活应用，特别是二倍角公式的各种变化形式要熟记于心.

21. 近期受新冠疫情的影响，某地区遭受了奥密克戎病毒的袭击，为了控制疫情，某单位购入了一种新型的空气消毒剂用于环境消毒，已知在一定范围内，每喷洒 1 个单位的消毒剂，空气中释放的消毒剂浓度 y（单位：毫克/立方米）随着时间 x（单位：小时）变化的关系如下：当 $0\leq x\leq 4$时，$y=\frac{8}{6-x}-1$；当 $4<x\leq 10$ 时，$y=5-\frac{1}{2}x$.若多次喷洒，则某一时刻空气中的消毒剂浓度为每次投放的消毒剂在相应时刻所释放的浓度之和.由实验知，当空气中消毒剂的浓度不低于 4（毫克/立方米）时，它才能起到杀灭空气中病毒的作用.

（1）若一次喷洒 4 个单位的消毒剂，则有效杀灭时间最长可达几小时？

（2）若第一次喷洒 2 个单位的消毒剂，6 小时后再喷洒 a（$1 \le a \le 4$）个单位的消毒剂，要使接下来的 4 小时中能够持续有效消毒，试求 a 的最小值.

【答案】（1）6 小时　（2）2

【解析】

【分析】（1）根据题意得到 $f(x)=4y$，再分类讨论 $0 \le x \le 4$ 与 $4<x \le 10$ 两种情况下，$f(x) \ge 4$ 的解集情况，从而得解；

（2）根据题意得到从第一次喷洒起，经过 x（$6 \leqslant x \leqslant 10$）小时后，浓度为 $g(x)$，从而利用基本不等式求得 $g(x) \ge 4\sqrt{2a}-a-2$，进而解不等式 $4\sqrt{2a}-a-2 \ge 4$ 即可得解.

【小问 1 详解】

因为一次喷洒 4 个单位的消毒剂，所以空气中释放的消毒剂浓度为 $f(x)=4y=\begin{cases} \dfrac{32}{6-x}-4, 0 \le x \le 4 \\ 20-2x, 4<x \le 10 \end{cases}$，

当 $0 \le x \le 4$ 时，$\dfrac{32}{6-x}-4 \ge 4$，解得 $2 \le x \le 4$；

当 $4<x \le 10$ 时，$20-2x \ge 4$，解得 $4<x \le 8$；

综上求得 $2 \le x \le 8$，

所以一次喷洒 4 个单位的消毒剂，则有效杀灭时间最长可达 6 小时.

【小问 2 详解】

设从第一次喷洒起，经过 x（$6 \leqslant x \leqslant 10$）小时后，浓度为 $g(x)=2\left(5-\dfrac{1}{2}x\right)+a\left(\dfrac{8}{6-(x-6)}-1\right)$

$=10-x+\dfrac{8a}{12-x}-a=12-x+\dfrac{8a}{12-x}-a-2$，

因为 $6 \leqslant x \leqslant 10$，所以 $12-x>0$，

所以 $12-x+\dfrac{8a}{12-x}-a-2 \ge 4\sqrt{2a}-a-2$，即 $g(x) \ge 4\sqrt{2a}-a-2$，

当且仅当 $12-x=\dfrac{8a}{12-x}$，即 $x=12-2\sqrt{2a}$ 时，等号成立，

又 $1 \le a \le 4$，则 $6<12-4\sqrt{2} \le 12-2\sqrt{2a} \le 12-2\sqrt{2}<10$，满足 $6 \leqslant x \leqslant 10$，等号成立，

所以当接下来的 4 小时中能够持续有效消毒时，可得 $4\sqrt{2a}-a-2\geq 4$，

解得 $2\leq a\leq 18$，又 $\because 1\leq a\leq 4$，$\therefore 2\leq a\leq 4$，所以 a 的最小值为 2.

【点睛】关键点点睛：在应用基本不等式求最值时，要把握不等式成立的三个条件，就是"一正——各项均为正；二定——积或和为定值；三相等——等号能否取得"，若忽略了某个条件，就会出现错误.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+a+\sin x$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）研究函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上的单调性；

（2）若对于 $\forall x\in[0,+\infty)$，恒有 $f(x)\geq a(x+1)+1$，求 a 的取值范围.

【答案】（1）在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增

（2）$(-\infty,2]$

【解析】

【分析】（1）$f(x)$ 求导后对 x 的范围进行讨论，研究其单调性；

（2）构造函数 $h(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-ax-1$，根据 $h(0)=0$ 对 a 的范围进行讨论进而求出结果.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=\mathrm{e}^x+\cos x$，

当 $x\in\left[-1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$\cos x\in[0,1]$，而 $\mathrm{e}^x\in\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right]$，所以 $f'(x)>0$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 时，$\cos x\in[-1,1]$，而 $\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}>\mathrm{e}^0=1$，

所以 $f'(x)>0$.

所以当 $x\in[-1,+\infty)$ 时，$\mathrm{e}^x+\cos x>0$，即 $f'(x)>0$.

综上，$f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 2 详解】

$f(x)\geq a(x+1)+1$ 即 $\mathrm{e}^x+\sin x-ax-1\geq 0$，

设 $h(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-ax-1$，

当 $a\leq 0$ 时，结合（1）知，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，则 $h(x)\geq h(0)=0$，

所以当 $a\leq 0$ 时，不等式显然成立.

当$a>0$时，$h'(x)=e^x+\cos x-a$，

令$g(x)=e^x+\cos x$，则$g'(x)=e^x-\sin x$，

当$x\in[0,+\infty)$时，$e^x\geq 1$，$\sin x\in[-1,1]$，所以$g'(x)=e^x-\sin x>0$，

所以$g(x)$为增函数，$g(x)=e^x+\cos x\geq g(0)=2$．

当$0<a\leq 2$时，$h'(x)\geq 0$，从而有$h(x)\geq h(0)=0$，此时不等式恒成立．

当$a>2$时，令$h'(x)=0$，即$e^x+\cos x-a=0$，

由前面分析知，函数$h'(x)=e^x+\cos x-a$在$[0,+\infty)$上是增函数，

且$h'(0)=2-a<0$，

$h'(1+a)=e^{1+a}+\cos(1+a)-a>(1+a)-1-a=0$．

故存在唯一的$x_0\in(0,1+a)$，使得$h'(x_0)=0$．

当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$为减函数且$h(0)=0$．

所以$h(x_0)<h(0)=0$与$h(x)\geq 0$恒成立矛盾．

综上所述，a的取值范围为$(-\infty,2]$．