

龙岩市 2023 年高中毕业班三月教学质量检测 数学试题参考答案

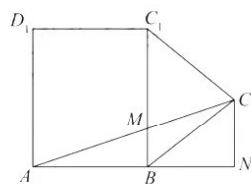
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 选项 | B | D | C | A | C | B | D | C |

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

| | | | | |
|----|-----|----|----|-----|
| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 选项 | ACD | BD | BC | BCD |

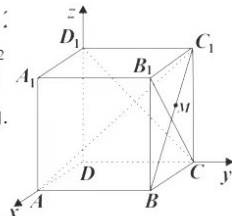
8. 简解： $\triangle AMC$ 的周长为 $AM+MC+AC$ ， AC 为定值，即 $AM+MC$ 最小时， $\triangle AMC$ 的周长最小，如图，将平面 BCC_1 展成与平面 ABC_1D_1 同一平面，当点 A, M, C 共线时，此时 $AM+MC$ 最小，在展开图中作 $CN \perp AB$ ，垂足为 N ， $\frac{BM}{CN} = \frac{AB}{AN} \Rightarrow \frac{BM}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$



解得： $BM=2\sqrt{2}-2$ ，如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系， $C(0,2,0)$ ， $M(\sqrt{2},2,2-\sqrt{2})$ ，连结 AC_1 ， $AC_1 \perp$ 平面 CB_1D_1 ，且经过 $\triangle CB_1D_1$ 的中心，

所以三棱锥 $M-CB_1D_1$ 外接球的球心在 AC_1 上，设球心 $O(a,2-a,0)$ ，

即 $a^2+(2-a-2)^2+(2-a)^2=(a-\sqrt{2})^2+(2-a-2)^2+(2-a-2+\sqrt{2})^2$
 $R^2=OC^2=4$ ，所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=16\pi$ ，故 C 正确。



12. 简解： $\because f'_n(x)=1-\frac{n}{x}$ ，由 $f'_n(x)>0$ 得： $x>n$

$\therefore f_n(x)$ 在 $(n,+\infty)$ 单调递增， $\therefore A$ 错；

$\because y=f_n(x)$ 有两个零点，方程 $\frac{1}{n}=\frac{\ln x}{x}$ 有两个根

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$ ，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ，

可得 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)$ 在 $x=e$ 处取得极大值 $g(e)=\frac{1}{e}$ ， $\therefore \frac{1}{n}<\frac{1}{e}$ ， $n>e$ ， $\therefore B$ 正确；

由上可得： $\therefore x_n < e < y_n (n \in \mathbb{N}^+)$

又 $\frac{1}{n}=\frac{\ln x_n}{x_n}$ ， $\frac{1}{n+1}=\frac{\ln x_{n+1}}{x_{n+1}}$ ，由 $g(x)$ 的单调性可得：

$\therefore \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ， $\therefore x_{n+1} < x_n, y_{n+1} > y_n$ ， $\therefore x_{n+1}-x_n < y_{n+1}-y_n$ ， $\therefore C$ 正确；

由已知，有 $f'_n(\theta)=\frac{f_n(\beta)-f_n(\alpha)}{\beta-\alpha}=1-\frac{n(\ln \beta-\ln \alpha)}{\beta-\alpha}$

而 $f'(\frac{\alpha+\beta}{2})=1-\frac{2n}{\alpha+\beta}$

$\therefore f'_n(\theta)-f'(\frac{\alpha+\beta}{2})=-\frac{n(\ln \beta-\ln \alpha)}{\beta-\alpha}+\frac{2n}{\alpha+\beta}=\frac{-n}{\beta-\alpha}(\ln \frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha})$

令 $t=\frac{\beta}{\alpha}(t>1)$ ，则 $\ln \frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha}=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$

易得 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增， $\therefore g(t)>g(1)=0$

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{|2 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

解得 $\lambda = 1$, \therefore 存在点 E 满足题意, $\therefore C_1E = 2$ 12 分

20. (本题满分 12 分)

解: (1) X 可能取值为 2, 3.

$$P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

$$P(X = 3) = 1 - P(X = 2) = \frac{4}{9} \text{2 分}$$

所以 X 的分布列如下:

| | | |
|-----|---------------|---------------|
| X | 2 | 3 |
| P | $\frac{5}{9}$ | $\frac{4}{9}$ |

$$\therefore E(X) = 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{4}{9} = \frac{22}{9} \text{4 分}$$

(2) 前两天中每一天甲以 2:0 获胜的概率均为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$;

$$\text{乙以 2:0 获胜的概率均为 } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{甲以 2:1 获胜的概率均为 } C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

$$\text{乙以 2:1 获胜的概率均为 } C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \text{6 分}$$

$$\therefore P(Y = 4) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{17}{81} \text{7 分}$$

$Y = 5$ 即获胜方前两天比分为 2:0 和 2:1, 或者 2:0 和 0:2 再加附加赛

$$\text{甲获胜的概率为 } C_2^1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{27} + C_2^1 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{243} \text{9 分}$$

$$\text{乙获胜的概率为 } C_2^1 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{27} + C_2^1 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{243} \text{11 分}$$

$$\therefore P(Y = 5) = \frac{16}{243} + \frac{80}{243} = \frac{32}{81}$$

$$\therefore P(Y \leq 5) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = \frac{17}{81} + \frac{32}{81} = \frac{49}{81} \text{12 分}$$

21. (本题满分 12 分)

解: (1) 设 $|MF_2| = 2r$, D 为线段 $|MF_2|$ 的中点,

$$\text{依题意, 得: } |OD| = 2\sqrt{2} - r, |MF_1| = 4\sqrt{2} - 2r$$

$$\text{所以, } 2a = |MF_1| + |MF_2| = 4\sqrt{2} - 2r + 2r = 4\sqrt{2}, a = 2\sqrt{2}$$

$$\text{又 } c = 2, \text{ 所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 8 - 4 = 4$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{4 分}$$

(2) 依题意, 当直线 l 斜率为 0 时, 不符合题意;

当直线 l 斜率不为 0 时, 设直线 l 方程为 $x = my + 2 (m \neq 0)$,

$$\therefore \ln \frac{\beta}{\alpha} - \frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha} > 0, \because 0 < \alpha < \beta, \therefore \beta - \alpha > 0$$

$$\therefore \frac{-n}{\beta-\alpha} < 0, \therefore f'_n(\theta) - f'_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < 0, \therefore f'_n(\theta) < f'_n\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \text{ 又 } f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增, } \therefore \theta < \frac{\alpha+\beta}{2},$$

即 $2\theta < \alpha + \beta$, $\therefore D$ 正确

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 1 14. $\sin \frac{\pi}{2}x$ (答案不唯一) 15. $2022 + \log_3 2$ 16. $\frac{1}{3}$

16. 简解：设直线 l 的方程为 $y = kx + \frac{4}{3}$ ，即 $3kx - 3y + 4 = 0$

设直线 OA ， OB 的方程分别为 $y = k_1x$ ， $y = k_2x$ ，即 $k_1x - y = 0$ ， $k_2x - y = 0$ ，

$$\because \text{直线 } OA \text{ 与圆 } E \text{ 相切, } \therefore \frac{|k_1 - 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} = r, \text{ 整理得 } (1 - r^2)k_1^2 - 2k_1 + 1 - r^2 = 0.$$

同理得 $(1 - r^2)k_2^2 - 2k_2 + 1 - r^2 = 0$. $\therefore k_1$ 与 k_2 是方程 $(1 - r^2)x^2 - 2x + 1 - r^2 = 0$ 的两个不同实数根

$$\therefore \begin{cases} r \neq 1 \\ \Delta = 4 - 4(1 - r^2)^2 > 0 \\ k_1 + k_2 = \frac{2}{1 - r^2} \\ k_1 k_2 = 1 \end{cases} \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } k_1 k_2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 1, \text{ 即 } x_1 x_2 = y_1 y_2. \text{ 由 } \begin{cases} y = kx + \frac{4}{3} \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 得 } 3ky^2 - 12y + 16 = 0,$$

$$\therefore \begin{cases} \Delta' = 144 - 64 \times 3k > 0 \\ y_1 + y_2 = \frac{4}{k} \\ y_1 y_2 = \frac{16}{3k} \end{cases}, \therefore k < \frac{3}{4}.$$

$$\text{又 } x_1 x_2 = \frac{1}{16}(y_1 y_2)^2, \therefore \frac{16}{9k^2} = \frac{16}{3k}, \therefore k = \frac{1}{3},$$

解法二：设直线 l 的方程为 $y = kx + \frac{4}{3}$ ，即 $3kx - 3y + 4 = 0$

设直线 OA ， OB 的方程分别为 $y = k_1x$ ， $y = k_2x$ ，即 $k_1x - y = 0$ ， $k_2x - y = 0$ ，

$$\therefore \angle AOB \text{ 的平分线过点 } E(1,1) \therefore \frac{|k_1 - 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1}} = \frac{|k_2 - 1|}{\sqrt{k_2^2 + 1}},$$

$$\text{整理得 } (k_1^2 + 1)(k_2 - 1)^2 = (k_2^2 + 1)(k_1 - 1)^2, (k_1 - k_2)(k_1 k_2 - 1) = 0, \therefore k_1 k_2 = 1$$

下与解法一同。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. (本题满分 10 分)

解：(1) 依题意，得： $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_1}$ ，即 $\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}$

$$\text{所以, } \frac{1}{2+d} = \frac{2+d}{4+6d}, \text{ 化简得: } d(d-2) = 0$$

因为 $d \neq 0$, 所以 $d = 2$ 3分
 所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ 4分
 经检验: $\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$ 成立5分

(2) 解法一:

因为 $a_n = 2n-1$

$$\text{所以 } b_n = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{4(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right), \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{解法二: } b_n = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n+1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-1} \right) + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

18. (本题满分 12 分)

解: (1) 由 $b \tan A + b \tan B = \frac{c}{\sqrt{3} \cos A}$ 得: $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{c}{\sqrt{3} b \cos A}$,

由正弦定理得: $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin C}{\sqrt{3} \sin B \cos A}$,3分

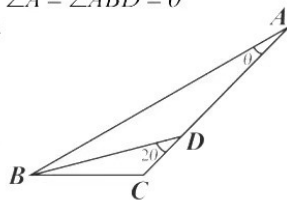
$\therefore \sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$, 所以 $\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \frac{\sin C}{\sqrt{3} \sin B \cos A}$

又 $C \in (0, \pi)$, $\therefore \sin C \neq 0$, $\therefore \sqrt{3} \sin B = \cos B$, 即 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

又 $B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{6}$6分

(2) 解法一: 因为 D 是 AC 边上的点, 且 $AD = 3DC = 3$, $\angle A = \angle ABD = \theta$
 所以 $\angle BDC = 2\theta$, $AD = BD = 3$, $DC = 1$, $AC = 4$

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得: $\frac{BC}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$,



即 $BC = \frac{4 \sin \theta}{\sin \frac{\pi}{6}} = 8 \sin \theta$ 8分

在 $\triangle BDC$ 中, 由余弦定理得: $BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos 2\theta = 10 - 6 \cos 2\theta$;

$\therefore 64 \sin^2 \theta = 10 - 6 \cos 2\theta$, $\therefore 52 \sin^2 \theta = 4$, 解得: $\sin^2 \theta = \frac{1}{13}$,11分

又 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{13}$12分

解法二:

过 A 作 $AE \perp BC$ 交 BC 延长线于 E ,

在 $Rt\triangle ACE$ 中 $AE = 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

在等腰 $\triangle ABD$ 中, 设 G 为 AB 中点, 则 $AB = 2AG = 6 \cos \theta$

$Rt\triangle ABE$ 中, $AE = AB \sin \angle ABE = 6 \cos \theta \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 3 \cos \theta$

$\therefore 3 \cos \theta = 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{6})$

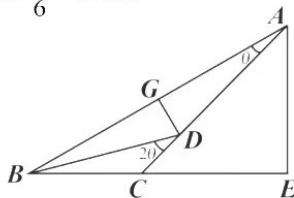
$3 \cos \theta = 2\sqrt{3} \sin \theta + 2 \cos \theta$

$2\sqrt{3} \sin \theta = \cos \theta$

$12 \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$

$\sin^2 \theta = \frac{1}{13}$

又 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{13}$12分



19. (本题满分 12 分)

解: (1) 过 A 在平面 AA_1B_1B 内作 $AD \perp A_1B_1$, 垂足为 D ,

\because 侧面 A_1ACC_1 为矩形, $\therefore CA \perp AA_1$, 又 $CA \perp AB$

$\therefore CA \perp$ 平面 AA_1B_1B , \therefore 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC , $AD \subset$ 面 AA_1B_1B

$\therefore AD \perp$ 平面 ABC 2分

$\therefore V_{C_1-ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore AD = \sqrt{3}$ 4分

$\because \angle A_1AB = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore \angle A_1AD = \frac{\pi}{6}$, $\therefore AA_1 = 2$ 5分

(2) 如图, 以 AB, AC, AD 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

则 $A_1(-1, 0, \sqrt{3}), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), C_1(-1, 2, \sqrt{3})$,

设 $\overrightarrow{C_1E} = \lambda \overrightarrow{C_1C}$, $\lambda \in [0, 1]$, 则 $E(\lambda - 1, 2, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$

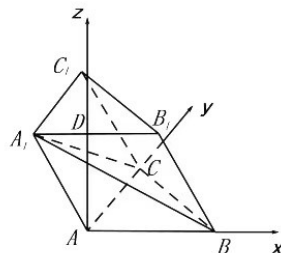
$\therefore \overrightarrow{AE} = (\lambda - 1, 2, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{A_1B} = (3, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{A_1C} = (1, 2, -\sqrt{3})$ 7分

设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3x - \sqrt{3}z = 0 \\ x + 2y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$,

取 $\vec{m} = (1, 1, \sqrt{3})$ 9分

设直线 AE 与平面 A_1BC 所成角为 θ



$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 2 \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{得} (m^2 + 2)y^2 + 4my - 4 = 0,$$

易知 $\Delta = 16m^2 + 16(m^2 + 2) > 0$.

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 2}, \quad y_1 \cdot y_2 = -\frac{4}{m^2 + 2}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

因为 $ME \perp x$ 轴, $NQ \perp x$ 轴, 所以 $E(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$,

$$\text{所以直线 } QM: y = \frac{y_1}{x_1 - x_2}(x - x_2); \quad \textcircled{1},$$

$$\text{直线 } NE: y = \frac{y_2}{x_2 - x_1}(x - x_1) \textcircled{2},$$

$$\text{联立} \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 解得 } x_p = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1 + y_2} = \frac{(my_1 + 2)y_2 + (my_2 + 2)y_1}{y_1 + y_2} = 2 + \frac{2my_1 y_2}{y_1 + y_2} = 4,$$

$\dots\dots\dots 7 \text{分}$

因为 $ME \parallel NQ$, ME 与直线 $x = 4$ 平行,

$$\text{所以 } S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2} |NQ| \cdot |x_p - x_1| = \frac{1}{2} |y_2| \cdot |4 - x_1| = \frac{1}{2} |2y_2 - my_1 y_2|, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{因为 } \frac{my_1 y_2}{y_1 + y_2} = 1,$$

$$\text{所以 } S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2} |2y_2 - (y_1 + y_2)| = \frac{1}{2} |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{2\sqrt{2m^2 + 2}}{m^2 + 2},$$

$$\text{由 } \frac{2\sqrt{2m^2 + 2}}{m^2 + 2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 解得 } m = \pm\sqrt{2}, \quad \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

故存在直线 l 的方程为 $x - \sqrt{2}y - 2 = 0$ 或 $x + \sqrt{2}y - 2 = 0$, 使得 ΔPMN 的面积等于 $\frac{\sqrt{6}}{2}$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. (本题满分 12 分)

解: (1) 由已知有 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线方程为: $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$

即: $y = \frac{1}{x_0}x - 1 + \ln x_0$, 将 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ 代入即有: $y = \frac{1}{x_0}x + \frac{2}{x_0 - 1}$ $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

由 $y = e^x$ 得 $y' = e^x$ 令 $e^x = \frac{1}{x_0}$ 得: $x = \ln \frac{1}{x_0}$, 此时 $y = \frac{1}{x_0}$

可得: 曲线 $y = e^x$ 在点 $(\ln \frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_0})$ 处的切线方程为:

$y - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}(x - \ln \frac{1}{x_0}) = \frac{1}{x_0}x + \frac{1}{x_0} \ln x_0$, 将 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$ 代入化简,

可得: $y = \frac{1}{x_0}x + \frac{2}{x_0 - 1}$

故曲线 $y = f(x)$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线。 $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) $\because F(x) = f(x) - g(x) = \ln x - x + \frac{2}{x} (x > 0)$

$\therefore F'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \frac{2}{x^2}$, 令 $F'(x_1) = F'(x_2) = m$, 得:

$$\begin{cases} \frac{2}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1 + m = 0 \\ \frac{2}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} + 1 + m = 0 \end{cases} \quad \therefore \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \text{ 为方程 } 2t^2 - t + 1 + m = 0 \text{ 的两根} \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ 即: $2(x_1 + x_2) = x_1 x_2$

$\therefore x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2) > 4\sqrt{x_1 x_2} \quad \therefore x_1 x_2 > 16 \cdots \cdots 8 \text{ 分}$

$\therefore F(x_1) + F(x_2) = (\ln x_1 - x_1 + \frac{2}{x_1}) + (\ln x_2 - x_2 + \frac{2}{x_2})$

$= (\ln x_1 + \ln x_2) - (x_1 + x_2) + (\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2})$

$= \ln x_1 x_2 - \frac{x_1 x_2}{2} + 1$

令 $t = x_1 x_2 > 16$, 则 $\ln(x_1 x_2) - \frac{x_1 x_2}{2} + 1 = \ln t - \frac{t}{2} + 1 \cdots \cdots 10 \text{ 分}$

令 $h(t) = \ln t - \frac{t}{2} + 1 (t > 16)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < 0 (t > 16)$

$\therefore h(t)$ 在 $(16, +\infty)$ 单调递减 $\therefore h(t) < h(16) = \ln 16 - 7 = 4 \ln 2 - 7$

即 $F(x_1) + F(x_2) < 4 \ln 2 - 7 \cdots \cdots 12 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线