

2024届全国高考分科调研模拟测试卷

数 学

注意事项：

- 本卷满分150分，考试时间120分钟。答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
- 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
- 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
- 考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，复数 z 对应点的坐标为 $(2, 2)$ ，则 $\frac{2-i}{z} =$
- A. $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ B. $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$
C. $-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$ D. $-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$
2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{y | y = x+1, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$
- A. $\{1, 2\}$ B. $\{1, 2, 3\}$
C. $\{2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$
3. 为了贯彻落实党史学习教育成果，南京师范大学附属中学名师“学史力行”送教井冈山中学。现有任教语文、数学、英语、物理、化学、生物的6名老师要安排在该中学高三理科1班~6班上一节公开示范课，每个班级只安排一名老师上课且每个老师只在其中一个班级上一节课，若要求数学老师不能安排在1班，化学老师不能安排在6班，则不同的安排上课的方法总数为
- A. 720 B. 504 C. 480 D. 360
4. 已知 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, $0 < \omega < 1$, 且 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\omega =$
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
5. 设 $a > b > 0$, 若 $a+b=4$, 则 $\frac{4}{a-2} + \frac{1}{b}$ 的最小值为
- A. 9 B. 6 C. $\frac{9}{2}$ D. 3
6. 已知函数 $f(x) = x^2 - \cos x$, $a = f(\log_4 5)$, $b = f(0.4^{0.5})$, $c = f\left(\log_3 \frac{1}{5}\right)$, 则
- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
7. 已知小郭、小张和小陆三名同学同时独立地解答一道概率试题，每人均有 $\frac{2}{3}$ 的概率解答正确，且三个人解答正确与否相互独立，在三人中至少有两人解答正确的条件下，小陆同学解答不正确的概率是
- A. $\frac{13}{20}$ B. $\frac{9}{20}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{20}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, $g(x) = \begin{cases} |3x-1|+1, & x>0, \\ -x^2-2x, & x\leq 0, \end{cases}$ 若函数 $y=g(f(x))-a$ 恰有 6 个零点,

则实数 a 的取值范围是

- A. $\left[0, \frac{5}{9}\right) \cup \{1\}$ B. $\left(0, \frac{5}{9}\right)$ C. $\left[\frac{5}{9}, 1\right]$ D. $(1, 2)$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知 α, β 是两个不同的平面, m, n 是两条不同的直线, 则下列命题一定正确的是

- A. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$
 B. 如果 $m \subset \alpha, \alpha \parallel \beta$, 那么 $m \parallel \beta$
 C. 如果 $\alpha \cap \beta = l, m \parallel \alpha$, 那么 $m \parallel l$
 D. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$

10. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的函数, 满足 $f(x+1)=f(x-3), f(1+x)=f(3-x)$, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 4
 B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称
 C. 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 2
 D. 当 $6 \leq x \leq 8$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$

11. 若将函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的值可能是

- A. $\frac{47}{2}$ B. $\frac{35}{2}$ C. $\frac{23}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

12. 抛物线 $C: x^2 = 2py$ 的焦点为 F , P 为其上一动点, 当 P 运动到 $(t, 1)$ 时, $|PF| = 2$, 直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点, 点 $M(4, 1)$, 则下列结论正确的是

- A. 抛物线的方程为 $x^2 = 8y$
 B. $|PM| + |PF|$ 的最小值为 4
 C. 当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切
 D. 若过 A, B 的抛物线的两条切线交准线于点 T , 则 A, B 两点的纵坐标之和的最小值为 2

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

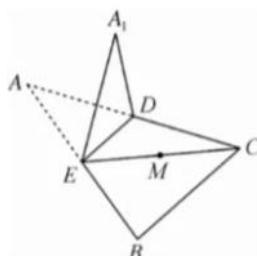
13. 已知向量 $\mathbf{a} = (k-3, 3), \mathbf{b} = (k-2, 2)$ ($k \in \mathbf{R}$), 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2m+3} - \frac{y^2}{2m} = 1$ 的实轴长为 6, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 < -1, a_2 > 0, a_3 < 3$, 公差 $d \in \mathbf{N}^*$, 且该数列在区间 $(\frac{1}{2}, \frac{17}{2})$ 中的项比在区

间 $\left[\frac{37}{2}, \frac{53}{2}\right]$ 中的项少 2 个, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 如图, DE 是边长为 4 的正 $\triangle ABC$ 的一条中位线, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折至 $\triangle A_1DE$, 当三棱锥 $A_1 - CED$ 的体积最大时, 过 EC 的中点 M 作四棱锥 $A_1 - BCDE$ 的外接球的截面, 则该截面圆的最小直径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

某农户新种植了一种蔬菜，为了监测它的生长情况，每周需抽检 10 棵，监测各棵蔬菜的高度，下表是某周抽检的高度(cm)：

9.7	10.1	9.8	10.2	9.7	9.9	10.2	10.2	10.0	10.2
-----	------	-----	------	-----	-----	------	------	------	------

(1)求上表数据的平均数 \bar{x} 和方差 s^2 ；

(2)在每周抽检的蔬菜中，如果出现了高度在 $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ 之外的蔬菜，就认为这批蔬菜在这周的生长过程可能出现了异常情况，需对当周的培养过程进行检查。下表是另一周抽检的高度：

10.1	10.3	9.7	9.8	10.0	9.8	10.3	10.0	10.7	9.8
------	------	-----	-----	------	-----	------	------	------	-----

从这周抽检的结果看，以(1)中的数据作为参考标准，是否需对当周的培养过程进行检查？

18. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $S_n = 2a_n - 1$ 。

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)已知数列 $\{c_n\}$ 是等差数列，且 $c_1 = a_1$, $c_3 = S_2$ ，设 $b_n = a_n \cdot c_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

19. (本小题满分 12 分)

在① $a \cos \frac{B}{2} = b \sin A$; ② $a \cos B = b \sin A$; ③ $\tan(B + \frac{\pi}{4}) = 2 + \sqrt{3}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答。

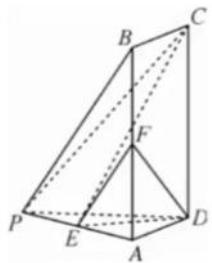
问题：在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $A = \frac{\pi}{3}$, $b = \sqrt{2}$ ，且 _____，求 $\triangle ABC$ 的面积。

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分。

20. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $CD \perp$ 平面 PAD , $PD \perp FD$, $PD=AD=2$, E, F 分别为 AP, AB 的中点.

- (1) 求证: $DF \perp EC$;
- (2) 求二面角 $F-ED-C$ 的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆的离心率 $e = \frac{1}{2}$, P 为椭圆 C 上一点, 若 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点, 点 M 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的动点 (M 不在坐标轴上), MA 与 MB 分别与椭圆 C 交 E, F 两点, 直线 EF 交 x 轴于 H 点, 判断点 M 的横坐标与点 H 的横坐标之积是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right) \ln(1+x)$.

- (1) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (2) 是否存在 a, b , 使得曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称? 若存在, 求 a, b 的值; 若不存在, 说明理由;
- (3) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值, 求 a 的取值范围.