

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, $g(x) = \begin{cases} |3x-1| + 1, & x > 0, \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0, \end{cases}$ 若函数 $y = g(f(x)) - a$ 恰有 6 个零点, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[0, \frac{5}{9}) \cup \{1\}$ B. $(0, \frac{5}{9})$ C. $[\frac{5}{9}, 1]$ D. $(1, 2)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知 α, β 是两个不同的平面, m, n 是两条不同的直线, 则下列命题一定正确的是

- A. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \perp \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$ B. 如果 $m \subset \alpha, \alpha \parallel \beta$, 那么 $m \parallel \beta$
 C. 如果 $\alpha \cap \beta = l, m \parallel \alpha$, 那么 $m \parallel l$ D. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$

10. 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的函数, 满足 $f(x+1) = f(x-3), f(1+x) = f(3-x)$, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 4
 B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称
 C. 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的最大值为 2
 D. 当 $6 \leq x \leq 8$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$

11. 若将函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y = \sin(\omega x + \frac{\pi}{12})$ 的图象重合, 则 ω 的值可能是

- A. $\frac{47}{2}$ B. $\frac{35}{2}$ C. $\frac{23}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

12. 抛物线 $C: x^2 = 2py$ 的焦点为 F , P 为其上一动点, 当 P 运动到 $(t, 1)$ 时, $|PF| = 2$, 直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点, 点 $M(4, 1)$, 则下列结论正确的是

- A. 抛物线的方程为 $x^2 = 8y$
 B. $|PM| + |PF|$ 的最小值为 4
 C. 当直线 l 过焦点 F 时, 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切
 D. 若过 A, B 的抛物线的两条切线交准线于点 T , 则 A, B 两点的纵坐标之和的最小值为 2

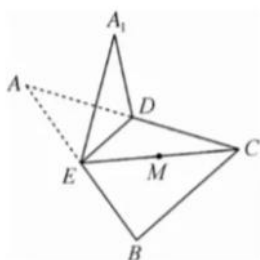
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $a = (k-3, 3), b = (k+2, 2)$ ($k \in \mathbf{R}$), 若 $a \parallel b$, 则 $|a-b| =$ _____.

14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2m+3} - \frac{y^2}{2m} = 1$ 的实轴长为 6, 则 $m =$ _____.

15. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 < -1, a_2 > 0, a_3 < 3$, 公差 $d \in \mathbf{N}^*$, 且该数列在区间 $(\frac{1}{2}, \frac{17}{2})$ 中的项比在区间 $[\frac{37}{2}, \frac{53}{2}]$ 中的项少 2 个, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式为 _____.

16. 如图, DE 是边长为 4 的正 $\triangle ABC$ 的一条中位线, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折至 $\triangle A_1DE$, 当三棱锥 A_1-BCDE 的体积最大时, 过 EC 的中点 M 作四棱锥 A_1-BCDE 的外接球的截面, 则该截面圆的最小直径为 _____.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

某农户新种植了一种蔬菜,为了监测它的生长情况,每周需抽检 10 棵,监测各棵蔬菜的高度,下表是某周抽检的高度(cm):

9.7	10.1	9.8	10.2	9.7	9.9	10.2	10.2	10.0	10.2
-----	------	-----	------	-----	-----	------	------	------	------

(1)求上表数据的平均数 \bar{x} 和方差 s^2 ;

(2)在每周抽检的蔬菜中,如果出现了高度在 $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ 之外的蔬菜,就认为这批蔬菜在这周的生长过程可能出现了异常情况,需对当周的培养过程进行检查.下表是另一周抽检的高度:

10.1	10.3	9.7	9.8	10.0	9.8	10.3	10.0	10.7	9.8
------	------	-----	-----	------	-----	------	------	------	-----

从这周抽检的结果看,以(1)中的数据作为参考标准,是否需对当周的培养过程进行检查?

18. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $S_n = 2a_n - 1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)已知数列 $\{c_n\}$ 是等差数列,且 $c_1 = a_1, c_3 = S_2$,设 $b_n = a_n \cdot c_n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

在① $a \cos \frac{B}{2} = b \sin A$; ② $a \cos B = b \sin A$; ③ $\tan\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{3}$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并给出解答.

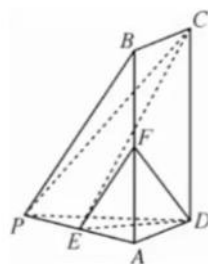
问题:在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, A = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{2}$, 且 _____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

注:如果选择多个条件分别进行解答,按第一个解答进行计分.

20. (本小题满分 12 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $CD \perp$ 平面 PAD , $PD \perp FD$, $PD=AD=2$, E, F 分别为 AP, AB 的中点.

- (1) 求证: $DF \perp EC$;
 (2) 求二面角 $F-ED-C$ 的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆的离心率 $e = \frac{1}{2}$, P 为椭圆 C 上一点, 若 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16 - 2|PF_1| \cdot |PF_2|$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
 (2) A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点, 点 M 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的动点 (M 不在坐标轴上), MA 与 MB 分别与椭圆 C 交 E, F 两点, 直线 EF 交 x 轴于 H 点, 判断点 M 的横坐标与点 H 的横坐标之积是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right) \ln(1+x)$.

- (1) 当 $a = -1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (2) 是否存在 a, b , 使得曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称? 若存在, 求 a, b 的值; 若不存在, 说明理由;
 (3) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值, 求 a 的取值范围.