

## 2023 年北大数学金秋营

### 第一天

1. 有一些石子，每个石子的重量可能为1,2,3,4,5. 求最小的正整数  $N$ ，使得只要这些石子的总重量不小于  $N$ ，就一定能将这些石子分为5堆，满足第  $i$  堆的总重量不小于  $2023i$ ， $1 \leq i \leq 5$ .
2. 对于整系数多项式  $P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$  ( $m > 0$ )，如果不存在次数小于  $m$  的整系数多项式  $Q(x)$ 、 $R(x)$ ，使得  $P(x)$ 、 $Q(x)R(x)$  对应的系数模2同余，就称  $P(x)$  是模2不可约的. 对正整数  $n$ ，求所有形如  $x^{2a_1} + x^{2a_2} + \dots + x^{2a_n} + 1$  的模2不可约的多项式，其中  $a_1 > a_2 > \dots > a_n \geq 0$  为整数.
3.  $ABCD$  为圆  $O$  的圆内接四边形， $AB$ 、 $CD$  交于点  $E$ ， $AD$ 、 $BC$  交于点  $F$ ， $AC$ 、 $BD$  交于点  $G$ .  $EF$  的中垂线分别与  $AC$  的中垂线、 $BD$  的中垂线交于点  $H$ 、 $I$ ， $\triangle HIO$  的外接圆和圆  $O$  的公共弦分别与  $AC$ 、 $BD$  交于点  $J$ 、 $K$ . 若  $EF$  的中垂线与圆  $O$  相切，证明： $\triangle GJK$  的外接圆与圆  $O$  相切.
4. 设  $G=(V,E)$  为简单无向图，对于  $V$  的非空子集  $A$ ，如果  $A$  中的顶点两两不相邻，且  $V-A$  中的每个顶点均与  $A$  的某个顶点相邻，就称  $A$  是一个极大独立集. 求无三角形的 2023 阶图的极大独立集数量的最大值.



## 2023年北大数学金秋营

### 第二天

1. 甲乙两人由甲开始轮流在黑板上写大于1的整数，要求新写的数不能是已经写的数的自然数系数线性组合，第一个不能写数的人输。甲乙谁有必胜策略？

2. 设  $n$  为正整数，求最小的正整数  $c$ ，使得对任意  $n$  次整值多项式  $P(x)$  及非负整数  $k$ ，

$cP^{(k)}(x)$  也是整值多项式，其中  $P^{(k)}(x)$  表示  $P(x)$  的第  $k$  阶导数。

3. 设  $m, a$  是大于1的整数。定义正整数集上的函数  $f(x)$ ，满足： $f(1)=0$ ，设  $x>1$  的标准

分解式为  $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ，则令  $f(x) = m^k (p_1 - 1)^{\alpha_1} (p_2 - 1)^{\alpha_2} \cdots (p_k - 1)^{\alpha_k}$ 。令  $a_1 = a$ ，

$a_{n+1} = f(a_n)$ ， $n=1, 2, \dots$  证明：存在正整数  $b$ ，使得数列  $\{a_n\}$  从某一项开始恒为  $b$ 。

4. 设函数  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  满足：

(a) 对任意两个不同的整数  $x, y$ ，有  $x - y \mid f(x)g(y) - g(x)f(y)$ ；

(b) 对任意整数  $x$ ，有  $f(x)^2 + g(x)^2 > 0$ ；

(c) 存在多项式  $P(x)$ ，使得对任意整数  $x$ ，有  $|f(x)| + |g(x)| < |P(x)|$ 。

证明：存在正整数  $m$ ，函数  $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ，及整系数多项式  $p(x), q(x)$ ，使得对绝对值充分大

的整数  $x$ ，都有  $mf(x) = p(x)c(x)$ 、 $mg(x) = q(x)c(x)$ 。

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主选拔在线官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜



自主选拔在线

