雅礼中学2020届高三月考试卷(六)

数学(理科)参考答案

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	C	C	B	D	B	A	D	C	C	A	B	A

2. C　**【解析】**设 z 对应的点为 (x,y),则 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,$\therefore |\bar{z}|_{\min}=\sqrt{3}$,$\therefore$ 选 C.

3. B　**【解析】**"$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角"$\Leftrightarrow \lambda>-\frac{1}{2}$ 且 $\lambda\neq 2$,$\therefore$ 选 B.

4. D　**【解析】**当 $x\to 0^+$,$\ln x\to -\infty$,$\therefore x\ln x<0$,
当 $x\to +\infty$ 时,$x\ln x\to +\infty$,$\therefore$ 选 D.

5. B　**【解析】**由 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$ 和 $S_m=S_n\Rightarrow S_{m+n}=0$,可知①②④都对,$\therefore$ 选 B.

6. A　**【解析】**$P=1-\frac{A_2^2A_2^2}{A_4^4}=\frac{5}{6}$. 选 A.

8. C　**【解析】**A、B、D 显然对,而 m 应该是 4.7 附近的数.

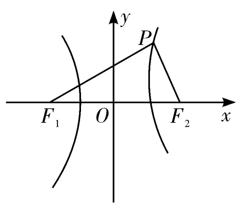
9. C　**【解析】**原式 $=\frac{\cos 10^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-2\sin(30^\circ-10^\circ)}{\sin 10^\circ}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=\sqrt{3}$,$\therefore$ 选 C.

10. A　**【解析】**$\frac{3}{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\log_4 8<\log_4 9=\log_2 3$,$\therefore b<\frac{3}{2}<a$,

$c=2^{\frac{1}{2}}$,$\therefore c^2=2<\left(\frac{3}{2}\right)^2$,$\therefore a>c$,$b=\log_4 5<\log_4 4^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}<2^{\frac{1}{2}}$,$\therefore$ 选 A.

11. B　**【解析】**$a_{n+1}=2a_n-1$,$\therefore a_{n+1}-1=2(a_n-1)$,
$\therefore a_n-1=(a_1-1)\times 2^{n-1}$,$\therefore a_n=(a_1-1)\times 2^{n-1}+1$,
$\because a_n$ 为递增数列,$\therefore a_1-1>0$,$\therefore a>1$,$\therefore$ 选 B.

12. A　**【解析】**如图,设 $|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,则 $m-n=2a$,



$\because \frac{\sin\angle PF_2F_1}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{m}{n}=\frac{c}{a}$,

$\therefore \frac{m-n}{n}=\frac{c-a}{a}$,

$\therefore \frac{2a}{n}=\frac{c-a}{a}$,$\therefore n=\frac{2a^2}{c-a}>c-a$,$\therefore c^2-2ac-a^2<0$,

令 $a=1$,$\therefore c^2-2c-1<0$,$\therefore 1-\sqrt{2}<c<1+\sqrt{2}$,

又 $c>a$,$\therefore 1<c<\sqrt{2}+1$,$\therefore 1<e<\sqrt{2}+1$. 选 A.

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. -5

14. 3　**【解析】**$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})$
$=|\overrightarrow{PM}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{PM}|^2-1$,

又点 M 为椭圆 C 的右焦点,$\therefore |\overrightarrow{PM}|^2-1\leqslant(a+c)^2-1=15$,$\therefore a+c=4$,又 $c=1$,$\therefore a=3$.

15. 160　**【解析】**$(x+y+z)^6=(x+y+z)(x+y+z)\cdots(x+y+z)$,
相当于 6 个括号中有三个括号选的是 x,即 $C_6^3x^3$,其余三个括号选 y 或 z,即 $(y+z)^3$,又此展开式的系数和为 2^3,$\therefore$ 系数之和为 $C_6^3\times 2^3=160$.

16. $5\sqrt{5}$ 【解析】$f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{8\sin x}{\cos^2 x}=\frac{8\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{(2\sin x-\cos x)(4\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=0$,

$\therefore 2\sin x=\cos x$,即 $\tan x=\frac{1}{2}$时,又 $0<x<\frac{\pi}{2}$,$\therefore$当 $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\cos x=\frac{2}{\sqrt{5}}$时,$f(x)_{\min}=5\sqrt{5}$.

三、解答题:本大题共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1)$\because (a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$,

$\therefore (a+b)(a-b)=(c-b)c$,$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$. ………… 2 分

又 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$,

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$, ………… 4 分

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)$\because A=\frac{\pi}{3}$,$\therefore a^2=b^2+c^2-bc\geqslant\frac{(b+c)^2}{2}-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{(b+c)^2}{4}$, ………… 8 分

$\therefore \left(\frac{b+c}{a}\right)^2\leqslant 4$,$\therefore \frac{b+c}{a}\leqslant 2$. ………… 10 分

$\therefore \frac{b+c}{a}$的最大值为 2.

又 $b+c>a$,$\therefore \frac{b+c}{a}$的取值范围为$(1,2]$. ………… 12 分

18.【解析】(1)方法一:$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1A})\cdot(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1B_1})=0$,$\therefore A_1C\perp B_1D_1$.

方法二:由题意可知,$AD_1=AB_1=2$,连接 A_1C_1,$A_1C_1\cap B_1D_1=O$,则 $AO\perp B_1D_1$,

$\because$四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形,$\therefore B_1D_1\perp A_1C_1$,

$\therefore B_1D_1\perp$平面 A_1ACC_1,又 $A_1C\subset$平面 A_1ACC_1,$\therefore B_1D_1\perp A_1C$. ………… 4 分

(2)方法一:$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A}$,

$\therefore |\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A})^2=4$,$\therefore AC_1=2$. ………… 8 分

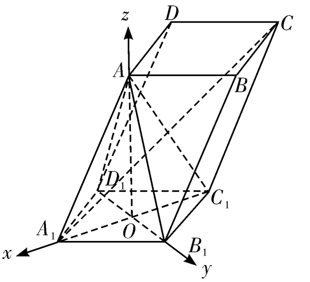
方法二:在$\triangle AB_1D_1$ 中,$AO=\sqrt{2}$,又 $A_1O=\sqrt{2}$,$AA_1=2$,

$\therefore AO^2+A_1O^2=A_1A^2$,$\therefore AO\perp A_1O$,又 $AO\perp B_1D_1$,

$\therefore AO\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$\therefore AO\perp OC_1$,$\therefore AC_1=2$.

(3)方法一:由(2)可知,$AO\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$,

以点 O 为原点,以 OA_1,OB_1,OA 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系(如图),则平面 AB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$,易得平面 AB_1C_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,-1)$.



$\therefore \cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{1}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,由题意可知所求的角为锐角.

$\therefore$所求角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 12 分

方法二:在$\triangle AB_1D_1$ 中,$D_1A\perp AB_1$,$\triangle AB_1C_1$ 为正三角形,取 AB_1 的中点 E,

在$\triangle B_1C_1E$ 中,$B_1C_1=2$,$B_1E=1$,$\angle C_1B_1E=60^\circ$,$\therefore C_1E=\sqrt{3}$.

设所求的角为 θ,则 $\cos\theta=\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{EC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{EC_1}}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{EC_1}|}=\frac{(\overrightarrow{A_1D_1}-\overrightarrow{A_1A})\cdot(\overrightarrow{B_1C_1}-\overrightarrow{B_1E})}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{EC_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

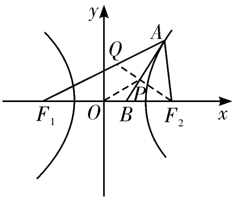
方法三:取 AB_1 的中点 E,连接 OE,EC_1,则$\angle OEC_1$ 为所求的角,在$\triangle OC_1E$ 中,利用余弦定理可求得$\angle OEC_1$ 的余弦值.

19.【解析】(1)$\because$双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 2x$,即 $x\pm\frac{y}{2}=0$,

$\therefore$设双曲线方程为:$x^2-\frac{y^2}{4}=\lambda(\lambda\neq 0)$,又双曲线过点$(2,2)$.

$\therefore 2^2-\frac{2^2}{4}=\lambda$,$\therefore\lambda=3$.$\therefore$双曲线方程为:$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$. ………… 5 分

(2)如图，过点 F_2 作角平分线 AB 的垂线，垂足为 P，且交 AF_1 于点 Q，连接 OP，则 $OP \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}F_1Q$，



由角平分线的性质定理可知 $|AQ|=|AF_2|$，

$\therefore |F_1Q|=|AF_1|-|AQ|=|AF_1|-|AF_2|=2a$，

$\therefore |OP|=a=\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 10 分

$\therefore$由圆的定义可知，点 P 的轨迹是以点 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆.

$\therefore$点 P 的轨迹方程为：$x^2+y^2=3$. ………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$. ………………………… 1 分

ⅰ. 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数. ………………………………………………………… 2 分

ⅱ. 当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\frac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$ 得 $x>\frac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 是增函数，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 是减函数. ………………………………… 4 分

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的增区间是 $(0,+\infty)$，无减区间.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的增区间是 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，减区间是 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$. ………………………………… 5 分

(2) 当 $x\geqslant 1$ 时，$g(x)=x\ln x-ax^2+a$，$g'(x)=\ln x+1-2ax$，

令 $h(x)=\ln x+1-2ax$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-2a$. ………………………………………………… 6 分

ⅰ. 当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递增，$\therefore h(x)\geqslant h(1)=1-2a>0$，

$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递增，$\therefore g(x)\geqslant g(1)=0$，$\therefore$不合题意. ……………………… 7 分

ⅱ. 当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$h(x)$ 在 $\left[1,\frac{1}{2a}\right)$ 递增.

$\therefore$当 $x\in\left[1,\frac{1}{2a}\right)$ 时，$h(x)\geqslant h(1)=1-2a>0$，$\therefore g(x)$ 在 $\left[1,\frac{1}{2a}\right)$ 递增，

$\therefore g\left(\frac{1}{2a}\right)>g(1)=0$，$\therefore$不合题意. ………………………………………………………… 9 分

ⅲ. 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，则 $h'(x)\leqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 恒成立，$\therefore h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递减，

$\therefore h(x)\leqslant h(1)=1-2a\leqslant 0$，$\therefore g'(x)\leqslant 0$，$\therefore g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递减，

$\therefore g(x)\leqslant g(1)=0$，$\therefore g(x)\leqslant 0$ 恒成立. ………………………………………………… 11 分

综上ⅰ、ⅱ、ⅲ可知 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ……………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) ξ 的取值为 0,1,2.

$P(\xi=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$； ………………………………………………………… 1 分

$P(\xi=1)=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{27}$；……………………………………… 2 分

$P(\xi=2)=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. ………………………………………………………… 3 分

$\therefore \xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{9}$

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{16}{27}+2\times\frac{1}{9}=\frac{22}{27}$. ………………………………………………… 4 分

(2)(ⅰ)由题意可知：$a_1=0,a_2=\frac{1}{3}$， ………………………………………………………………… 6 分

$a_n=\frac{1}{3}(1-a_{n-1})(n\geqslant 2)$，∴$a_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{4}\right)(n\geqslant 2)$，∴$a_n-\frac{1}{4}=\left(a_1-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

∴$a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. ……………………………………………………………………………… 10 分

(ⅱ)由(ⅰ)可知，当 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to\frac{1}{4}$，

∴当传球次数足够多时，球落在甲手上的概率趋向于一个常数$\frac{1}{4}$.

又第一次从甲开始传球，而且每一次都是等可能地把球传给任何一个人，∴球落在每个人手上的概率都相等. ∴球落在乙、丙、丁手上的概率为$\left(1-\frac{1}{4}\right)\div 3=\frac{1}{4}$.

∴随着传球次数足够多时，球落在甲、乙、丙、丁每个人手上的概率都是$\frac{1}{4}$. ……………………… 12 分

方法二：先同理求出球分别落在乙、丙、丁手上的概率相等，再叙述，当 $n\to+\infty$ 时，大小均为$\frac{1}{4}$也可.

22.【解析】(1)由$\begin{cases}x=1+t, & ①\\ y=3+2t, & ②\end{cases}$($t$ 为参数)

①×2－②得：$2x-y+1=0$. ……………………………………………………………………………………… 2 分

又∵$\rho^2+8\rho^2\sin^2\theta=9$，∴$x^2+y^2+8y^2=9$，

∴$\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ………………………………………………………………………………………………… 4 分

∴l 的普通方程为：$2x-y+1=0$，C 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$. ……………………………… 5 分

(2)由 l 的参数方程可得其标准形式为：

$\begin{cases}x=1+\frac{1}{\sqrt{5}}t,\\ y=3+\frac{2}{\sqrt{5}}t\end{cases}$($t$ 为参数)， ……………………………………………………………………… 7 分

代入$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，得：$\frac{37}{5}t^2+\frac{110}{\sqrt{5}}t+73=0$，∴$\begin{cases}t_1+t_2=-\frac{\frac{110}{\sqrt{5}}}{\frac{37}{5}},\\ t_1t_2=\frac{73}{\frac{37}{5}},\end{cases}$ ……………………………………… 8 分

$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=-\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{110}{\sqrt{5}\times 73}=\frac{22\sqrt{5}}{73}$. ………………………………………… 9 分

∴当直线 l 与曲线 C 相交时，$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{22\sqrt{5}}{73}$. ………………………………………… 10 分

23.【解析】(1)$f(x)=|x-1|+|x-3|+|x-3|$，$f(x)$表示数轴上的点到数轴上 1,3,3 对应点的距离之和.

∴$f(x)_{\min}=f(3)=2$，∴$c=2$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)∵$a+b=2$，∴$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}=\frac{1}{4}[(a+1)+(b+1)]\left(\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left[a^2+b^2+\frac{(b+1)a^2}{a+1}+\frac{(a+1)b^2}{b+1}\right]\geqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab)=\frac{1}{4}(a+b)^2=1$；

当$\begin{cases}a+b=2,\\ \frac{(b+1)a^2}{a+1}=\frac{(a+1)b^2}{b+1},\end{cases}$即$\begin{cases}a=1,\\ b=1\end{cases}$时，有最小值 1. ………………………………………… 10 分