

绝密★启用并使用完毕前

2021 年济南市高三模拟考试

数学试题

本试卷共 4 页,22 题,全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

- 1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知 $\alpha \in (0, \pi)$,若 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$,则 $\tan \alpha$ 的值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

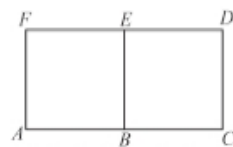
2.设集合 $A = \{x \mid \frac{x-1}{x} < 0\}$, $B = \{x \mid x+1 > 0\}$,则“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的

- A.充要条件 B.充分不必要条件
C.必要不充分条件 D.既不充分也不必要条件

3.已知单位向量 a, b, c 满足 $a+b+c=0$,则 a 与 b 的夹角为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

4.环保部门为降低某社区在改造过程中产生的扬尘污染,决定对全部街道采取洒水降尘作业.该社区街道的平面结构如图所示(线段代表街道),洒水车随机选择 A, B, C, D, E, F 中的一点驶入进行作业,则选择的驶入点使洒水车能够不重复地走遍全部街道的概率为



- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

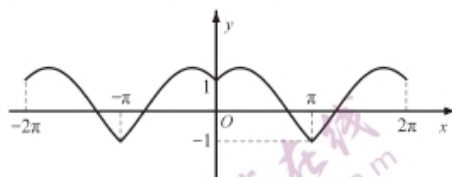
5.已知双曲线 $\frac{x^2}{m+1} - \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 的渐近线方程为 $x \pm \sqrt{3}y = 0$,则 $m =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{3} - 1$ C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. 2

数学试题 第 1 页 (共 4 页)

6. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象如图所示, 则 $f(x)$ 的解析式可能是

- A. $f(x) = \sin x + \cos x$
 B. $f(x) = |\sin x| + \cos x$
 C. $f(x) = \sin|x| + \cos x$
 D. $f(x) = \sin|x| + |\cos x|$



7. 已知菱形 $ABCD$, $AB = BD = 2$, 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起, 使二面角 $A-BD-C$ 的大小为 60° , 则三棱锥 $A-BCD$ 的体积为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

8. 设 $a = 2.022 \ln 2.020$, $b = 2.021 \ln 2.021$, $c = 2.020 \ln 2.022$, 则

- A. $a > c > b$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

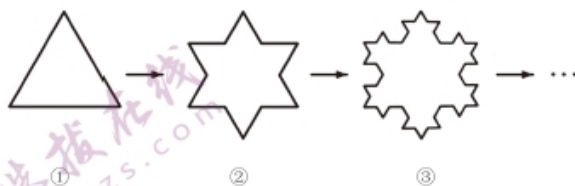
9. 在 $(\frac{2}{x} - x)^6$ 的展开式中, 下列说法正确的是

- A. 常数项为 160 B. 第 4 项的二项式系数最大
 C. 第 3 项的系数最大 D. 所有项的系数和为 64

10. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax + 1$ 的图象在 $x = -2$ 处切线的斜率为 9, 则下列说法正确的是

- A. $a = 3$ B. $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值
 C. 当 $x \in (-2, 1]$ 时, $f(x) \in (-1, 3]$ D. $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 中心对称

11. 1904 年, 瑞典数学家科赫构造了一种曲线, 如图, 取一个边长为 1 的正三角形, 在每个边上以中间的 $\frac{1}{3}$ 为一边, 向外侧凸出作一个正三角形, 再把原来边上中间的 $\frac{1}{3}$ 擦掉, 得到第 2 个图形, 重复上面的步骤, 得到第 3 个图形, 这样无限地作下去, 得到的图形的轮廓线称为科赫曲线。云层的边缘, 山脉的轮廓, 海岸线等自然界里的不规则曲线都可用“科赫曲线”的方式来研究, 这门学科叫“分形几何学”。下列说法正确的是



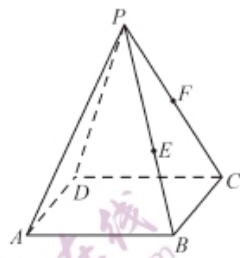
- A. 第 4 个图形的边长为 $\frac{1}{81}$
 B. 记第 n 个图形的边数为 a_n , 则 $a_{n+1} = 4a_n$
 C. 记第 n 个图形的周长为 b_n , 则 $b_n = 3 \cdot (\frac{4}{3})^{n-1}$
 D. 记第 n 个图形的面积为 S_n , 则对任意的 $n \in \mathbb{N}_+$, 存在正实数 M , 使得 $S_n < M$

数学试题 第 2 页 (共 4 页)

12. 画法几何的创始人—法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, A, B 为椭圆上两个动点. 直线 l 的方程为 $bx + ay - a^2 - b^2 = 0$. 下列说法正确的是
- A. C 的蒙日圆的方程为 $x^2 + y^2 = 3b^2$
- B. 对直线 l 上任意点 P , $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$
- C. 记点 A 到直线 l 的距离为 d , 则 $d - |AF_2|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$
- D. 若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 C 相切, 则矩形 $MNGH$ 面积的最大值为 $6b^2$

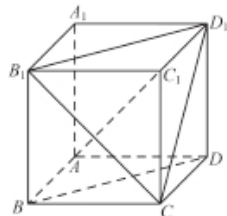
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知复数 $z = \frac{2+i}{-i}$ (其中 i 为虚数单位), 则 $|z|$ 的值为 _____.
14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_7 = 28$, 则 $a_2 + a_3 + a_7$ 的值为 _____.
15. 能够说明“若 $a > b$, 则 $\frac{1}{a - \sqrt{a}} < \frac{1}{b + \sqrt{b}}$ ”是假命题的一组非零实数 a, b 的值依次为 _____, _____.
16. 在通用技术课上, 老师给同学们提供了一个如图所示的木质正四棱锥模型 $P-ABCD$, 并要求同学们将该四棱锥切割成三个小四棱锥. 某小组经讨论后给出如下方案: 第一步, 过点 A 作一个平面分别交 PB, PC, PD 于点 E, F, G , 得到四棱锥 $P-AEFG$; 第二步, 将剩下的几何体沿平面 ACF 切开, 得到另外两个小四棱锥. 在实施第一步的过程中, 为方便切割, 需先在模型表面画出截面四边形 $AEFG$, 若 $\frac{PE}{PB} = \frac{3}{5}$, $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{PG}{PD}$ 的值为 _____.



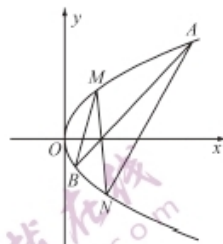
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , $a = \sqrt{5}$, $b = 3$, $\sin A + \sqrt{5} \sin B = 2\sqrt{2}$.
- (1) 求角 A 的值; (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.
18. (12 分)
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a(x+1)e^x, & x \leq 0, \\ x^2 - ax + \frac{1}{2}, & x \geq 0. \end{cases}$
- (1) 若 $a = 2$, 求 $f(x)$ 的最小值; (2) 若 $f(x)$ 恰好有三个零点, 求实数 a 的取值范围.
19. (12 分)
- 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 和平面 α , 直线 $AC_1 \parallel$ 平面 α , 直线 $BD \parallel$ 平面 α .
- (1) 证明: 平面 $\alpha \perp$ 平面 B_1CD_1 ;
- (2) 点 P 为线段 AC_1 上的动点, 求直线 BP 与平面 α 所成角的最大值.



20.(12分)

如图, A, B, M, N 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上四个不同的点, 直线 AB 与直线 MN 相交于点 $(1, 0)$, 直线 AN 过点 $(2, 0)$.



(1) 记 A, B 的纵坐标分别为 y_A, y_B , 求 $y_A \cdot y_B$ 的值;

(2) 记直线 AN, BM 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 λ , 使得 $k_2 = \lambda k_1$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

21.(12分)

某机构为研究考生物理成绩与数学成绩之间的关系, 从一次考试中随机抽取 11 名考生的数据, 统计如下表:

数学成绩 x	46	65	79	89	99	109	110	116	123	134	140
物理成绩 y	50	54	60	63	66	68	0	70	73	76	80

(1) 由表中数据可知, 有一位考生因物理缺考导致数据出现异常, 剔除该组数据后发现, 考生物理成绩 y 与数学成绩 x 之间具有线性相关关系, 请根据这 10 组数据建立 y 关于 x 的回归直线方程, 并估计缺考考生如果参加物理考试可能取得的成绩;

(2) 已知参加该次考试的 10 000 名考生的物理成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 用剔除异常数据后的样本平均值作为 μ 的估计值, 用剔除异常数据后的样本标准差作为 σ 的估计值, 估计物理成绩不低于 75 分的人数 Y 的期望.

附: 参考数据:

$\sum_{i=1}^{11} x_i$	$\sum_{i=1}^{11} y_i$	$\sum_{i=1}^{11} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{11} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{11} (y_i - \bar{y})^2$	$\frac{2\ 586}{8\ 326}$
1 110	660	68 586	120 426	4 770	0.31

上表中的 x_i 表示样本中第 i 名考生的数学成绩, y_i 表示样本中第 i 名考生的物理成绩,

$$\bar{y} = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} y_i.$$

参考公式: ① 对于一组数据: u_1, u_2, \dots, u_n , 其方差: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \bar{u}^2$.

② 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $\hat{v} = \hat{a} + \hat{b}u$ 的斜

$$\text{率和截距的最小二乘估计分别为: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \hat{a} = \bar{v} - \hat{b}\bar{u}.$$

③ 若随机变量 ξ 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi < \mu + \sigma) \approx 0.683$,

$$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) \approx 0.955, P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) \approx 0.997.$$

22.(12分)

已知正项数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(a_n + 1), n \in \mathbf{N}_+$.

证明: (1) $a_{n+1} < a_n$; (2) $a_n - 2a_{n+1} < a_n \cdot a_{n+1}$; (3) $\frac{1}{2^n} < a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.


数学试题 第 4 页 (共 4 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》