

# 名校联盟 2021 届普通高中教育教学质量监测考试

## 全国卷(新高考) 数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:高考全部内容.

### 第 I 卷

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 5x < 0\}$ ,  $B = \{-1, 1, 3, 5\}$ , 则  $A \cap B =$

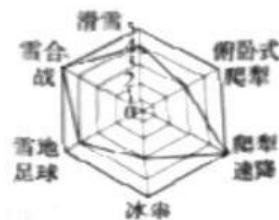
- A.  $\{1\}$                       B.  $\{3\}$                       C.  $\{1, 3\}$                       D.  $\{1, 3, 4\}$

2. 复数  $z$  满足  $z = \frac{4i}{1+i}$ , 则  $z$  的共轭复数为

- A.  $2-2i$                       B.  $2+2i$                       C.  $-2-2i$                       D.  $-2+2i$

3. 2020 年冬奥会申办成功,让中国冰雪运动迎来了新的发展机会,某校冰雪体育社团开展了滑雪、雪合战、雪地足球、冰壶、爬犁速降及俯卧式爬犁 6 个冬季体育运动项目,同学甲对这 6 项运动项目进行达标测试(测试分数如图),从中任抽 3 项,则至少一项的分数为 4 分的抽取方式有

- A. 10 种                      B. 12 种  
C. 16 种                      D. 20 种



4. 如图,这是一块出土的残破的古代圆形形状的铜镜片,将其放在直角坐标系中,圆上三个点坐标为  $A(0, 4)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(6, 2)$ , 则估算铜镜片的半径为

- A.  $2\sqrt{5}$                       B. 6  
C.  $3\sqrt{5}$                       D. 7



5. 2020 年夏季各地复工复产后,某夜市一个饭店为促进顾客消费,推出外卖服务.

利用手机软件网上订餐.如果顾客订餐金额不低于 200 元,给顾客优惠  $x$  元.顾客点餐成功后,顾客需先支付餐价优惠后的 80%,送到全部结账.为保证该餐馆老板收到每笔订单的第一笔金额均不低于优惠前该顾客一次性消费金额的七折,则  $x$  的最大值为

- A. 21                      B. 25                      C. 33                      D. 40

6. 已知平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$  与  $BD$  垂直相交于点  $O$ , 且  $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{1}{2}$ , 四边形面积为  $2\sqrt{3}$ , 点  $M$  是线段  $AD$  的中点, 则  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AM}$  的值为

- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{9}{16}$                       D. -1

7. 随着移动互联网的快速发展,基于互联网的共享单车应运而生.2019 年 1 月份至 10 月份(月份代码分别为 1, 2, ..., 10)共享单车运营公司  $M$  在某县城城区内单车投放数  $y$  (辆)与月份代码  $x$  的数据符合回归方程  $\hat{y} = 235e^{0.1x}$ , 则预计 2019 年 12 月份该公司投放的单车数为(精确到个位)

参考数据:  $e^{1.0} \approx 2.72$ ,  $e^{1.2} \approx 3.32$ ,  $y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_{10} = e^{10.1}$ ,  $x = 5.5$ .

- A. 780 辆                      B. 870 辆                      C. 880 辆                      D. 903 辆



已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{2^x - 1}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ ，不等式  $f(x) > k|x| - 1 (k > 0)$  的解集包含  $(-1, 1)$ ，则实数  $k$  的取值范围是

- A.  $(-\infty, 4)$                       B.  $(0, 4)$   
C.  $(0, 4]$                               D.  $[4, +\infty)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分。

3. 设点  $P$  为曲线  $C: x^2 + \frac{y^2}{n} = 1$  上一点， $A, B$  (异于点  $P$ ) 是曲线上关于坐标原点对称的两点，设直线  $PA, PB$  的斜率分别为  $k_1, k_2 (k_1, k_2 \neq 0)$ ，且  $k_1 k_2 = \lambda$ ，则关于该曲线的下列结论正确的是

- A. 当  $\lambda = -1$  时，曲线  $C$  为圆  
B. 当  $\lambda > 0$  时，曲线  $C$  为焦点在  $y$  轴上的双曲线  
C. 当  $-1 < \lambda < 0$  时，曲线  $C$  为焦点在  $x$  轴上的椭圆  
D. 当  $\lambda < -1$  时，曲线  $C$  为焦点在  $y$  轴上的椭圆

10. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega = 2k, k \in \mathbb{N}^+)$ ，若条件 \_\_\_\_\_ 成立，可得  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 。

- A.  $f(x)$  相邻对称中心的距离为  $\pi$                       B.  $x = \frac{2\pi}{3}$  是  $f(x)$  的一个极值点  
C. 在区间  $(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{3})$  上单调                                      D.  $|f(x)|$  的最小正周期不小于  $\frac{\pi}{3}$

11. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ ，且  $1 + \frac{2}{2^{x+y}} = \frac{9}{2^x + 2^y}$ ，则下列关系式中成立的是

- A.  $x+y$  的最大值为 4    B.  $2^x + 2^y$  的最大值为 8  
C.  $x+y$  的最小值为 2    D.  $2^x + 2^y$  的最小值为 1

12. 近几年，大力发展大棚蔬菜可以有效带动当地群众增收脱贫。某村农户小李有一个面积一亩的大棚全部种植西红柿或黄瓜，每年种植两茬，假设每茬种植何种蔬菜之间互不影响。设每茬种植西红柿的概率是  $p$ ，种植黄瓜的概率是  $1-p$ ，在 10 茬中恰好  $k$  茬种植西红柿的概率为  $P$ ，同时预计 2020 年种植西红柿，每亩收入 5 万元；种植黄瓜，每亩 6 万元，则下列结论正确的是

- A. 若  $k = 5$ ，则  $p = \frac{1}{2}$  时， $P$  取得最大值  
B. 若  $p = \frac{1}{3}$ ，则  $k = 3$  时， $P$  取得最大值  
C. 2020 年农户小李两茬种植不同品种的概率为  $p(1-p)$   
D. 若  $p = \frac{1}{3}$ ，则 2020 年小李的大棚预计收入为 11 万元

## 第 II 卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数  $f(x) = e^x$  的反函数图象上一点到  $l: y = x + 1$  的最短距离为 \_\_\_\_\_。  
14. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$ ，过  $C$  的焦点  $F$  的直线  $l$  交抛物线的准线于点  $P$ ，点  $A$  在抛物线上且  $\triangle APF$  为等边三角形，则点  $A$  的横坐标为 \_\_\_\_\_。  
15. 已知矩形  $ABCD$ ， $AB = 2AD$ ，现从角  $A$  向矩形  $ABCD$  内部发射一束光线  $l$ ，光线在矩形内部经 4 次反射后从角  $C$  处射出，若光线  $l$  与  $AB$  所成的角  $\theta (\theta > 45^\circ)$ ， $M(\cos\theta, \sin\theta)$ ， $N(2\cos\theta + \sin\theta, 4\cos\theta - \sin\theta)$ ，则直线  $MN$  的斜率为 \_\_\_\_\_。  
16. 已知四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面为菱形，棱长均为 4， $\angle BAD = 60^\circ$ ， $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$ ，在四边形  $BCC_1B_1$  内一点  $P$ ， $D_1P$  与平面  $BCC_1B_1$  所成的角的正切值为  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则点  $P$  的轨迹长度为 \_\_\_\_\_。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知  $\triangle ABC$  中，三个内角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ 。在 ①  $\frac{2c-b}{\cos B} = \frac{a}{\cos A}$ ，②  $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$ ，③  $2a \cos C = 2b + c$ 。这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答。  
若  $a=7, b=5$ ，\_\_\_\_\_，求  $\triangle ABC$  的面积。

18. (本小题满分 12 分)

社区网格员已经成为居民身边的“贴心人”。他们在网格中默默奉献，时刻关注辖区居民身边的点点滴滴，为社区建设提供坚实的基础，他们忙碌的身影也成为了社区里一道亮丽的风景线。2020 年夏天，社区网格员小李和小张负责该社区男性和女性各 25 位老年居民的健康保健，周一小李随机对其中 20 位老年居民进行血压测量，周三小张也随机对其中 20 位老年居民进行血压测量，被小李和小张同时进行血压测量的老年居民占比为  $\frac{1}{5}$ 。假设小李和小张血压测量相互独立，互不影响。一段时间后，经过调查统计发现，50 位老年居民对他们两人的工作满意率为 66%。

- (1) 依照是否进行血压测量分类，按分层抽样的方式抽取 5 人，在从 5 人中再抽取 2 人上门面谈，求这两人均来自进行血压测量老年居民的概率  
(2) 填写下面列联表：

	满意	不满意
男性居民	20	
女性居民		

判断是否有 95% 的把握认为满意率与居民的性别有关

$$\text{附：} K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且满足  $a_1=2, S_n=2S_{n-1}+2(n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 。

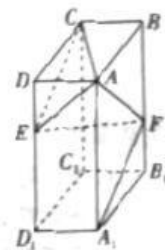
(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 数列  $\{b_n\}$ ，已知  $b_1=1, b_{2n}=b_{2n-1}+1, b_{2n+1}=b_{2n}+a_n, n \in \mathbb{N}^*$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前 10 项和。

20. (本小题满分 12 分)

如图,在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,点  $E, F$  分别在棱  $DD_1, BB_1$  上,且  $2DE=ED_1, BF=2FB_1, AD=1, AA_1=3$ ,该长方体外接球的表面积为  $14\pi$ .

- (1)证明:  $A_1F \parallel$  平面  $ACE$ ;
- (2)求平面  $ABCD$  与平面  $AEF$  所成角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右顶点  $A, B$  恰为双曲线  $M: \frac{4x^2}{9} - \frac{4y^2}{27} = 1$  的左、右焦点,  $E$  的离心率为  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 过双曲线  $M$  右顶点的直线交椭圆  $E$  于  $C, D$  两点.

- (1)求椭圆  $E$  的标准方程;
- (2)设直线  $AC$  与  $BD$  的交点为  $P$ , 求证:  $P$  点在一条定直线上.

22. (本小题满分 12 分)

定义在  $\mathbf{R}$  上的单调函数  $f(x)$ , 满足  $f[f(x) - e^x] = 1$  ( $e$  为自然对数的底数).

- (1)证明:  $f(x) - ex \geq (x-1)^2$ ;
- (2)求函数  $y = af(x) - \sin x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上极值的取值范围内的整数值.



## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线