2018年全国高中数学联赛河南省预赛高二试题参考答案

一、填空题（本题共8个小题，每小题8分，满分64分）

1. 解：$\because f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}$，

$\therefore kn\le\frac{1}{2}$， 得 $n\le\frac{1}{2k}<1$，

所以 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上是增函数.

则 $\begin{cases}f(m)=-\frac{1}{2}m^2+m=km\\ f(n)=-\frac{1}{2}n^2+n=kn\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}m=0\\ n=2(1-k)<0\end{cases}$（舍）或 $\begin{cases}n=0\\ m=2(1-k)<0\end{cases}$. 故填 0.

2. 解：因小正四面体可以在纸盒内任意转动，所以小正四面体棱长最大时为大正四面体内切球的内接正四面体. 记大正四面体的外接球半径为 R，小正四面体的外接球（大正四面体的内切球）半径为 r，易知 $r=\frac{1}{3}R$，故小正四面体棱长的最大值为 $\frac{1}{3}\times 6=2$. 故填 2.

3. 解：易知 $(\sqrt{3}+i)^{10}$ 的展开式中，所有奇数项的和是复数的实部.

又 $(\sqrt{3}+i)^{10}=\left[(-2i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\right]^{10}=(-2i)^{10}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}=(-1024)\times(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$=512-512\sqrt{3}i$. 故填 512.

4. 解：$\because \overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$，

$\therefore 5\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，

$\therefore S_1:S_2:S_3=5:4:3$. 故填 $5:4:3$.

5. 解：记 $M=\min\left\{\frac{1}{a},\frac{2}{b},\frac{4}{c},\sqrt[3]{abc}\right\}$，

则 $M\le\frac{1}{a}$，$M\le\frac{2}{b}$，$M\le\frac{4}{c}$，于是 $M^3\le\frac{8}{abc}$，得 $\sqrt[3]{abc}\le\frac{2}{M}$ ……①

又 $M\le\sqrt[3]{abc}$ ……②

由①②可得 $M\le\frac{2}{M}$，所以 $M\le\sqrt{2}$，即 $M_{\max}=\sqrt{2}$，当且仅当 $c=2b=4a=2\sqrt{2}$ 时取得.

故填$\sqrt{2}$.

6. 解：令$x=0$得，$a_0=4^{2n}$；

分别令$x=1$和$x=-1$，将得到的两式相加，得

$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\dfrac{1}{2}(6^{2n}+2^{2n})$；

所以 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\dfrac{1}{2}(6^{2n}+2^{2n})-4^{2n}$

$=2^{2n-1}(3^{2n}+1)-4^{2n}$

$\equiv(-1)^{2n-1}\times1-1^{2n}\equiv-2\equiv1(\bmod 3)$. 故填1.

7. 解：设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=a+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$是参数,$\alpha$是倾斜角且$\alpha\in(0,\ \pi)$），

代入抛物线方程得：$t^2\sin^2\alpha-4t\cos\alpha-4a=0$，

设该方程的两根为t_1,t_2，则$t_1+t_2=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$，$t_1\cdot t_2=-\dfrac{4a}{\sin^2\alpha}$，

则 $\dfrac{1}{|PM|^2}+\dfrac{1}{|QM|^2}=\dfrac{1}{t_1^2}+\dfrac{1}{t_2^2}$

$=\dfrac{t_1^2+t_2^2}{(t_1t_2)^2}=\dfrac{(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{(t_1t_2)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{16\cos^2\alpha}{\sin^4\alpha}+\dfrac{8a}{\sin^2\alpha}}{\dfrac{16a^2}{\sin^4\alpha}}=\dfrac{2\cos^2\alpha+a\sin^2\alpha}{2a^2}$为常数，

所以$a=2$. 故填2.

8. 解：“3阶色序”中，每个点的颜色有两种选择，故“3阶色序”共有$2\times2\times2=8$种.

一方面，n个点可以构成n个“3阶色序”，故该圆中的等分点的个数不多于8个；

另一方面，若$n=8$，则必须包含全部8个“3阶色序”，如按逆时针方向确定8个的颜色为“红，红，红，蓝，蓝，蓝，红，蓝”符合条件.

故该圆中等分点的个数最多可有8个. 故填8.

二、（本题满分16分）解：由题意得：$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha+\cos\beta$

则$(\cos\alpha-1)\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha=0$ …………4分

记点$P(\cos\beta,\sin\beta)$，直线$l:(\cos\alpha-1)x-\sin\alpha y-\cos\alpha=0$，

则点P的轨迹方程为单位圆：$x^2+y^2=1$，且$P\in l$ …………8分

从而圆心 $O(0,0)$ 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|-\cos\alpha|}{\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+(-\sin\alpha)^2}}\le 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 12\text{ 分}$$

整理得 $\cos^2\alpha+2\cos\alpha-2\le 0$

解得 $-1\le\cos\alpha\le\sqrt{3}-1$

故 $\cos\alpha$ 的最大值为 $\sqrt{3}-1$. ⋯⋯⋯⋯16 分

三、（本题满分 20 分）解：易知点 $A(1,1)$，$B(1,-1)$ 均在该椭圆上， ⋯⋯⋯⋯5 分

设椭圆的对称中心为 (a,b)，

则由对称性可知点 $A'(2a-1,2b-1)$，$B'(2a-1,2b+1)$ 均在该椭圆上，

代入方程得：

$$17(2a-1)^2-16(2a-1)(2b-1)+4(2b-1)^2-34(2a-1)+16(2b-1)+13=0 \cdots\cdots ①$$

$$17(2a-1)^2-16(2a-1)(2b+1)+4(2b+1)^2-34(2a-1)+16(2b+1)+13=0 \cdots\cdots ②$$

②−① 并化简可得：$b=2a-2$ ⋯⋯③

将③代入①并化简得：$4a^2-8a+4=0$，解得 $a=1$，从而 $b=0$，

所以该椭圆的对称中心为 $(1,0)$. ⋯⋯⋯⋯10 分

由于对称轴经过对称中心，故可设对称轴方程为 $y=k(x-1)(k\ne 0)$，

设点 $A(1,1)$ 关于直线 $y=k(x-1)$ 的对称点为 $A_0(x_0,y_0)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{y_0+1}{2}=k(\dfrac{x_0+1}{2}-1)\\ \dfrac{y_0-1}{x_0-1}=-\dfrac{1}{k}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{k^2+2k+1}{k^2+1}\\ y_0=\dfrac{k^2-1}{k^2+1}\end{cases} \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 15\text{ 分}$$

又 A_0 在椭圆上，则有 $17x_0^2-16x_0y_0+4y_0^2-34x_0+16y_0+13=0$，

将④式代入上式并化简得 $k(8k^2-13k-8)=0$，

因 $k \neq 0$，则 $8k^2-13k-8=0$，解得 $k=\dfrac{13\pm5\sqrt{17}}{16}$，

所以该椭圆的对称轴方程为 $y=\dfrac{13\pm5\sqrt{17}}{16}(x-1)$． …………20 分

四、（本题满分 20 分）证明：（Ⅰ）∵ $a_{16}=4$，$a_{17}=1$，$a_{18}=3$，$a_{19}=2$，$a_{20}=1$，$a_{21}=1$，$a_{22}=0$，

$a_{23}=1$，$a_{24}=1$，$a_{25}=0$，……

∴自第 20 项起，每三个相邻的项周期地取值 1，1，0，

又 $2018=19+666\times3+1$，

故 $a_{2018}=1$． …………5 分

（Ⅱ）首先证明：数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现"0"项．

假设 $\{a_n\}$ 中没有"0"项，由于 $a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，所以，当 $n\geq3$ 时，都有 $a_n\geq1$．

若 $a_{n+1}>a_n$，则 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n\leq a_{n+1}-1(n\geq3)$，

若 $a_{n+1}<a_n$，则 $a_{n+2}=a_n-a_{n+1}\leq a_n-1(n\geq3)$，

即 a_{n+2} 要么比 a_{n+1} 至少小 1，要么比 a_n 至少小 1， …………10 分

令 $b_n=\begin{cases}a_{2n+1},(a_{2n+1}>a_{2n+2})\\a_{2n+2},(a_{2n+1}<a_{2n+2})\end{cases}$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $0<b_{n+1}\leq b_n-1$，

由于 b_1 是确定的正整数，这样下去，必然存在某项 $b_k<0$，这与 $b_k>0$ 矛盾，

故 $\{a_n\}$ 中必有"0"项． …………15 分

若第一次出现的"0"项为 a_n，记 $a_{n-1}=M(M\neq0)$，则自第 n 项开始，每三个相邻的项周期地取值 0，M，M，即 $a_{n+3k}=0$，$a_{n+3k+1}=M$，$a_{n+3k+2}=M$，$k=0,1,2,\cdots$

所以数列 $\{a_n\}$ 中一定可以选取无穷多项组成两个不同的常数列． …………20 分

五、（本题满分 20 分）解：不妨设 $a\geq b\geq c$，显然 $c\geq2$， …………5 分

若 $c\geq5$，此时有 $\dfrac{1}{a}\leq\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{5}$，

由 $abc=2(a-1)(b-1)(c-1)$ 可得 $\dfrac{1}{2}=(1-\dfrac{1}{a})(1-\dfrac{1}{b})(1-\dfrac{1}{c})\geq(\dfrac{4}{5})^3$，矛盾，

故 c 只能取 2、3、4． …………10 分

①若 $c=2$，则 $ab=(a-1)(b-1)$，得 $a+b=1$，又 $a\geq b\geq2$，故无解；

②若 $c=3$，则 $3ab=4(a-1)(b-1)$，即 $(a-4)(b-4)=12$，又 $a\ge b\ge 3$，

从而 $\begin{cases}a-4=12\\b-4=1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a-4=6\\b-4=2\end{cases}$，或 $\begin{cases}a-4=4\\b-4=3\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=16\\b=5\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=10\\b=6\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=8\\b=7\end{cases}$，

其中能够构成三角形的只有 $a=8$，$b=7$，$c=3$； …………15 分

③若 $c=4$，则 $2ab=3(a-1)(b-1)$，即 $(a-3)(b-3)=6$，又 $a\ge b\ge 4$，

从而 $\begin{cases}a-3=6\\b-3=1\end{cases}$，或 $\begin{cases}a-3=3\\b-3=2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=9\\b=4\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=6\\b=5\end{cases}$，

其中能够构成三角形的只有 $a=6$，$b=5$，$c=4$；

综上，存在边长均为整数的满足条件的 ΔABC，其三边长分别为 $3,7,8$ 或 $4,5,6$.

…………20 分