中学生标准学术能力测试诊断性测试 12 月测试

文科数学（一卷）答案

一．选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	B	A	C	B	A	D	B	C	C	D

二． 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 9

14. 60°

15. ± 3

16. $2\sqrt{3}+2$

三．解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、2 选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17.（12 分）

（1）$a_2=5$，$a_3=16$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{5}{4}$，$b_3=2$；.....4 分

（2）$\because \dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{3}{4}$，$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{3}{4}$，$\therefore \{b_n\}$ 是等差数列；.....8 分

（3）由前面知，$b_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}(3n-1)$，$\therefore a_n=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$......12 分

18.（12 分）

（1）由题意得，从 6 名员工中任选 2 名，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$，

$\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\}\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\}$，

$\{B_1,B_2\},\{B_1,B_3\},\{B_2,B_3\}$，共 15 个......3 分

所选两名员工都是甲分公司所包含的基本事件有：$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_2,A_3\}$，共 3 个，所

以所求事件的概率为 $p=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$；……6分

（2）从甲分司和乙分公司各任选 1 名员工，其一切可能的结果组成的基本事件有：$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$，$\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_2,B_3\}$ $\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{A_3,B_3\}$ 共9个，

包含 A_1 但不包括 B_1 的事件所包含的基本事件有 $\{A_1,B_2\},\{A_1,B_3\}$ 共 2 个，所以所求事件的概率为 $p=\frac{2}{9}$……12分

19.（12分）

（1） 取 BC 中点 N，连接 MN， AN，$\therefore MN=AE$， $MN//AE$，

$\because EA\perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 四边形 $AEMN$ 是矩形，

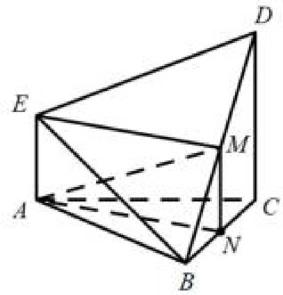
$\therefore EM\perp MN$，……2分

由题意知，$ED=EB=2\sqrt{5}$，$\because M$ 为 BD 的中点，

$\therefore EM\perp BD$，……4分

又 $\because BD\cap MN=M$，$\therefore EM\perp$ 平面BCD，

$\because EM\subset$ 平面AEM，$\therefore$ 平面$AEM\perp$ 平面BCD……6分



第 19 题

（2） 由题意知，$V_{E-ABM}=V_{M-ABE}$，$\because MN//$ 平面ABE，

$\therefore V_{M-ABE}=V_{N-ABE}=V_{E-ABN}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABN}\cdot AE$……9分

$AN=\sqrt{13}$，$S_{\Delta ABN}=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot AN=\frac{\sqrt{39}}{2}$，$\therefore V_{E-ABM}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{39}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{39}}{3}$……12分

20.（12分）

（1）当点 P 在第一象限时，设 $P(t,2\sqrt{t})$，$k_{PA}=\frac{2\sqrt{t}-0}{t+2}=\frac{2}{\sqrt{t}+\frac{2}{\sqrt{t}}}\le\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore k_{PA}\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$，同理，当点 P 在第四象限时，$\therefore k_{PA}\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，综上所述

$\therefore k_{PA}\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$……4分

（2）设直线l的方程为$y=kx+b(k\neq 0)$，联立方程$\begin{cases}y=kx+b\\y^2=4x\end{cases}$，得$ky^2-4y+4b=0$，

$\Delta=16-16kb>0$，

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}$，$y_1\cdot y_2=\dfrac{4b}{k}$，……**6 分**

$\because \angle PAO=\angle QAO$ ，

$\therefore k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1}{x_1+2}+\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{4y_1y_2(y_2+y_1)+32(y_1+y_2)}{y_1^2y_2^2+8(y_1^2+y_2^2)+64}$

$=\dfrac{4b+8k}{b^2+4k^2-4kb+8}=0$，……**8 分**

$b=-2k$，……**10 分**

$\therefore y=kx-2k=k(x-2)$，$\therefore$直线$l$恒过定点$(2,0)$……**12 分**

21.（12 分）

（1）$f(x)$定义域为R

$f'(x)=2e^{2x}-3ae^x-2a^2$，

当$a=1$时，令$f'(x)=2e^{2x}-3e^x-2=(e^x-2)(2e^x+1)=0$，解得$x_0=\ln 2$，

当$x\in(-\infty,\ln 2)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(\ln 2,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

综上，$x\in(-\infty,\ln 2)$时，$f(x)$单调递减；$x\in(\ln 2,+\infty)$时，$f(x)$单调递增……**4 分**

（2）$\because \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>-2a^2-1$，$\therefore$不妨设$x_1>x_2$，

则$f(x_1)+(2a^2+1)x_1>f(x_2)+(2a^2+1)x_2$，

$\therefore f(x)+(2a^2+1)x$在$R$上单调递增；……**8 分**

记$g(x)=f(x)+(2a^2+1)x=e^{2x}-3ae^x+x$，

$g'(x)=2e^{2x}-3ae^{x}+1\geq 0$ 恒成立，$\therefore a\leq\frac{2e^{2x}+1}{3e^{x}}=\frac{1}{3}(2e^{x}+\frac{1}{e^{x}})$ 对 $x\in R$ 恒成立，即

$\therefore a\leq\frac{1}{3}(2e^{x}+\frac{1}{e^{x}})_{\min}$，$\because 2e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\geq 2\sqrt{2}$，当且仅当 $2e^{x}=\frac{1}{e^{x}}$，即 $e^{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号取到，

$\therefore a\leq\frac{2\sqrt{2}}{3}$……12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程]（10 分）

（1）$x^2+y^2-4x-1=0$……5 分

（2）当 $\alpha=n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$ 时，直线 l：$x=1$，此时 $|AB|=4$……7 分；

当 $\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$ 时，设直线 l：$y-1=k(x-1)$，圆心 $(2,0)$ 到直线 l 的距离最大值为

$d_{\max}=\sqrt{2}$，此时 $|AB|=2\sqrt{5-2}=2\sqrt{3}$，$\because 4>2\sqrt{3}$，$\therefore|AB|_{\min}=2\sqrt{3}$……10 分

23．[选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

（1）$f(x)=\begin{cases}2x-1,x>2\\3,-1\leq x\leq 2\\-2x+1,x<-1\end{cases}$，$f(x)_{\min}=3$，即 $t=3$；……5 分

（2）$\because a+b=3$，且 $a>0,b>0$

$\therefore\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}=\frac{1}{6}(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2})(a+1+b+2)=\frac{1}{6}(2+\frac{b+2}{a+1}+\frac{a+1}{b+2})\geq\frac{2}{3}$．

当且仅当 $\begin{cases}\frac{b+2}{a+1}=\frac{a+1}{b+2}\\a+b=3\end{cases}$，即 $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$ 时，等号取到……10 分

微信扫一扫，快速关注