

武汉市部分重点中学 2022—2023 学年度下学期期中联考 高二数学试卷参考答案及评分标准

一、二选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	D	C	C	B	A	B	ACD	AB	ACD	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $2\ln 2 - 4 < m < -\frac{5}{2}$

14. 三

15. $[\frac{1}{3e}, +\infty)$

16. $\frac{3}{2}$ (2分), $\sqrt{2}$ (3分)

四、解答题：共 70 分.

17. (10 分)

解：(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$,

$\because x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点,

$\therefore f'(1) = -9 + a = 0$,

$\therefore a = 9$,

..... 2 分

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x > 3$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < 3$.

..... 4

分

所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$, 减区间为 $(1, 3)$.

..... 5

分

(2) 由 (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$,

又 $\because f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 在 $[1, 3]$ 上单调递减, 在 $[3, 4]$ 上单调递

增,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(3) = 0$, 又 $f(-1) = -16$,

..... 9

分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上的最小值为 $f(-1) = -16$

6. 10 分

18. (12 分)

解：(1) $C_{10}^7 = 120$

..... 4 分

$$(2) \frac{C_{10}^4 C_6^3 C_3^3}{A_2^2} = 2100 \quad \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) A_3^3 A_5^5 A_6^4 = 2 \ 5 \ 9 \ 2 \ 0 \ 0 \quad \dots \dots \dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \left(\frac{a_1+1}{2}\right)^2$, $\therefore a_1 = 1$, $\dots \dots \dots 1 \text{ 分}$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{a_n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_{n-1}+1}{2}\right)^2$$

$$\text{得 } 4a_n = a_n^2 - a_{n-1}^2 + 2(a_n - a_{n-1})$$

$$a_n^2 - a_{n-1}^2 - 2(a_n + a_{n-1}) = 0$$

$$\therefore (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) = 0$$

由已知, 数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数

$$\text{得 } a_n - a_{n-1} = 2,$$

$\therefore \{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, $\dots \dots \dots 5 \text{ 分}$

$$\therefore a_n = 2n - 1; \quad \dots \dots \dots 6 \text{ 分}$$

(2) 由 (1) 知, $a_n = 2n - 1$,

$$\text{则 } b_n = \frac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)} = \frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)}, \quad \dots \dots \dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore T_{n+1} - T_n = \frac{n+1}{4(n+2)} - \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4(n+1)(n+2)} > 0,$$

$\therefore \{T_n\}$ 单调递增,

$$\therefore T_n \geq T_1 = \frac{1}{8},$$

$$\therefore T_n = \frac{n}{4(n+1)} < \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{8} \leq T_n < \frac{1}{4}, \text{ 使得 } m-2 < T_n < 2m-1 \text{ 恒成立, } \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{只需 } \begin{cases} \frac{1}{4} \leq 2m-1 \\ m-2 < \frac{1}{8} \end{cases},$$

$$\text{解之得 } \frac{5}{8} \leq m < \frac{17}{8}. \quad \dots \dots \dots 12 \text{ 分}$$

20. (12 分)

解 (1) 已知两端的高压线塔相距 1200 米, 且相邻两线塔相距 x 米, 故需要建线塔 $\left(\frac{1200}{x}-1\right)$

$$\begin{aligned} \text{个, 则 } y &= \left(\frac{1200}{x}-1\right) \times 50 + \frac{1200}{x} \times x[\ln(x+12)+1] \\ &= \frac{60000}{x} - 50 + 1200 \cdot \ln(x+12) + 1200 \\ &= 1200 \cdot \ln(x+12) + \frac{60000}{x} + 1150 \end{aligned}$$

所以 y 关于 x 的函数关系式为 $y = 1200 \cdot \ln(x+12) + \frac{60000}{x} + 1150, x \in (0, 1200)$

.....5

分

$$(2) y' = \frac{1200}{x+12} - \frac{60000}{x^2} = 1200 \times \frac{x^2-50(x+12)}{(x+12)x^2} = 1200 \times \frac{(x+10)(x-60)}{(x+12)x^2}$$

令 $y' = 0$, 即 $(x+10)(x-60) = 0$, 解得 $x = -10$ (舍) 或 $x = 60$ 7 分

当 $0 < x < 60$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减; 当 $60 < x < 1200$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增;

所以当 $x = 60$ 时, y 有最小值,9 分

$$\text{且 } y_{\min} = 1200 \cdot \ln(60+12) + \frac{60000}{60} + 1150 = 1200 \times \ln 72 + 2150$$

$$\text{又 } \ln 72 = \ln(8 \times 9) = \ln 8 + \ln 9 = 3\ln 2 + 2\ln 3 \approx 3 \times 0.69 + 2 \times 1.1 = 4.27$$

$$\therefore y_{\min} = 1200 \times 4.27 + 2150 = 7274 \text{ (万元)} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以需新建 $\frac{1200}{60}-1 = 19$ 个线塔才能使工程费用 y 有最小值, 最小值为 7274 万元.

.....12 分

21. (12 分)

解: (1) 由题意知: $c = \sqrt{3}$.

根据椭圆的定义得: $2a = \sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2}$, 即 $a = 2, b^2 = 4-3 = 1$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$4 分

(2) 由题意设直线 l 的方程为 $y = kx + m (m \neq 0)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 消元得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0,$$

当 $\Delta = 64k^2m^2 - 16(4k^2 + 1)(m^2 - 1) > 0$, 即 $4k^2 - m^2 + 1 > 0$ 时满足题意,

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{4k^2 + 1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 4}{4k^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 = 2 + \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$) = 2 + \frac{24k^2m^2 - 6m^2 + 24k^2 + 6}{(4k^2 + 1)^2} = 2 + \frac{6m^2(4k^2 - 1) + 6(4k^2 + 1)}{(4k^2 + 1)^2},$$

若 $|\overrightarrow{PQ}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 为定值, 则上式与 m^2 无关, 故 $4k^2 - 1 = 0$, 得 $k = \pm \frac{1}{2}$,

• • • • • 8 分

$$\text{此时 } |PQ| = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 4\sqrt{k^2 + 1} \times \frac{\sqrt{4k^2 + 1 - m^2}}{1 + 4k^2} = \sqrt{5} \times \sqrt{2 - m^2}.$$

$$\text{又点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{2|m|}{\sqrt{5}},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \times d \times |PQ| = |m| \cdot \sqrt{2 - m^2} \leq \frac{m^2 + 2 - m^2}{2} = 1,$$

当且仅当 $|m| = \sqrt{2 - m^2}$, 即 $m = \pm 1$ 时, 等号成立.

经检验, 此时 $\Delta > 0$ 成立,

所以 $\triangle OPQ$ 面积的最大值为 1.



• • • • • 12 分

22. (12 分)

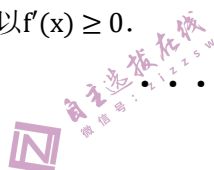
解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - \sin x - 1$, $f'(x) = e^x - \cos x$,

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $e^x \geq e^0 = 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$, 所以 $f'(x) \geq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

$$f(x) \geq f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上只有一个零点 $x = 0$.



• • • • • 2 分

(2) ①当 $a \leq 1$ 时, 对任意的 $x \in [0, \pi]$, $f(x) = e^x - 1 - a \sin x \geq e^x - 1 - \sin x$,

设 $g(x) = e^x - 1 - \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), 则 $g'(x) = e^x - \cos x \geq 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单

调递增, 又 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$, 因为 $f(x) \geq g(x)$, 所以 $f(x) \geq 0$, 满足题意;

• • • • • 8

分

②当 $a > 1$ 时, $f'(x) = e^x - a \cos x$, $f''(x) = e^x + a \sin x > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增,

又 $f'(0) = 1 - a < 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一的零点 x_0 ,

且当 $0 \leq x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, x_0)$ 上单调递减,

又 $f(0)=0$ ，所以当 $x \in (0, x_0)$ 时， $f(x) < 0$ ，从而 $f(x) \geq 0$ 不能恒成立，不合题意，舍去；

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$ 。

• • • • • 12 分

