



北京市东城区 2016—2017 学年度第二学期高三综合练习(二)

2017.5

数学(理科)

本试卷共 4 页,共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷(选择题 共 40 分)

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4 < 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$

- A. $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 2\}$ B. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$
C. $\{x | -2 < x < 2\}$ D. $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

2. 下列函数中为奇函数的是

- A. $y = x + \cos x$ B. $y = x + \sin x$ C. $y = \sqrt{x}$ D. $y = e^{-x}$

3. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x + 2y$ 的最大值为

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

4. 设 a, b 是非零向量, 则“ a, b 共线”是“ $|a + b| = |a| + |b|$ ”的

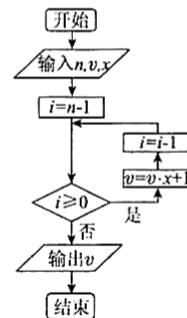
- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1 + a_5 = \frac{17}{2}, a_2 a_4 = 4$, 则 $S_6 =$

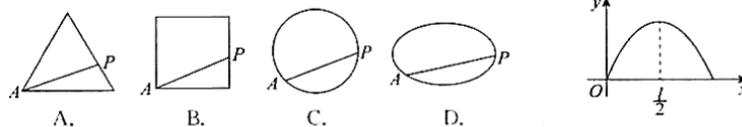
- A. $\frac{27}{16}$ B. $\frac{27}{8}$ C. $\frac{63}{4}$ D. $\frac{63}{2}$

6. 我国南宋时期的数学家秦九韶(约 1202—1261)在他的著作《数书九章》中提出了多项式求值的秦九韶算法. 如图所示的框图给出了利用秦九韶算法求多项式的一个实例. 若输入的 $n = 5, v = 1, x = 2$, 则程序框图计算的是

- A. $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
B. $2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 5$
C. $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
D. $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$



7. 动点 P 从点 A 出发,按逆时针方向沿周长为 l 的平面图形运动一周, A, P 两点间的距离 y 与动点 P 所走过的路程 x 的关系如图所示,那么动点 P 所走的图形可能是

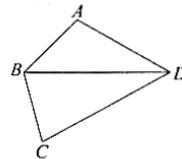


8. 据统计某超市两种蔬菜 A, B 连续 n 天价格分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 和 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, 令 $M = \{m | a_m < b_m, m = 1, 2, \dots, n\}$, 若 M 中元素个数大于 $\frac{3}{4}n$, 则称蔬菜 A 在这 n 天的价格低于蔬菜 B 的价格, 记作: $A < B$, 现有三种蔬菜 A, B, C , 下列说法正确的是
- A. 若 $A < B, B < C$, 则 $A < C$
 B. 若 $A < B, B < C$ 同时不成立, 则 $A < C$ 不成立
 C. $A < B, B < A$ 可同时不成立
 D. $A < B, B < A$ 可同时成立

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 复数 $i(2-i)$ 在复平面内所对应的点的坐标为 _____.
10. 在极坐标系中, 直线 $\rho \cos \theta + \sqrt{3} \rho \sin \theta + 1 = 0$ 与圆 $\rho = 2a \cos \theta (a > 0)$ 相切, 则 $a =$ _____.
11. 某校开设 A 类选修课 4 门, B 类选修课 2 门, 每位同学需从两类选修课中共选 4 门. 若要求至少选一门 B 类课程, 则不同的选法共有 _____ 种. (用数字作答)
12. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = 45^\circ, \angle ADB = 30^\circ, BC = 1, DC = 2, \cos \angle BCD = \frac{1}{4}$, 则 $BD =$ _____; 三角形 ABD 的面积为 _____.



13. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F , 且与该抛物线相交于 A, B 两点, 其中点 A 在 x 轴上方. 若直线 l 的倾斜角为 60° , 则 $|OA| =$ _____.
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \in (0, 2], \\ \min\{|x-1|, |x-3|\}, & x \in (2, 4], \\ \min\{|x-3|, |x-5|\}, & x \in (4, +\infty). \end{cases}$
- ① 若 $f(x) = a$ 有且只有 1 个实根, 则实数 a 的取值范围是 _____;
- ② 若关于 x 的方程 $f(x+T) = f(x)$ 有且只有 3 个不同的实根, 则实数 T 的取值范围是 _____.

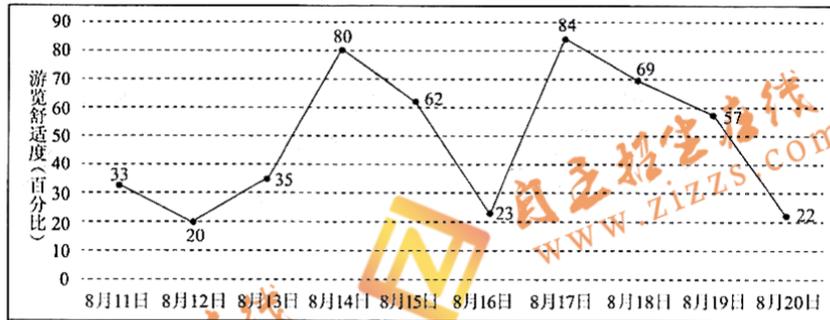
三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15. (本小题共 13 分)
- 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + a \cdot \cos 2x (a \in \mathbf{R})$.
- (I) 若 $f(\frac{\pi}{6}) = 2$, 求 a 的值;
- (II) 若 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减, 求 $f(x)$ 的最大值.



16. (本小题共 13 分)

小明计划在 8 月 11 日至 8 月 20 日期间游览某主题公园. 根据旅游局统计数据, 该主题公园在此期间“游览舒适度”(即在园人数与景区主管部门核定的最大瞬时容量之比, 40% 以下为舒适, 40%—60% 为一般, 60% 以上为拥挤) 情况如图所示. 小明随机选择 8 月 11 日至 8 月 19 日中的某一天到达该主题公园, 并游览 2 天.

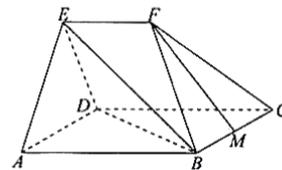


- (I) 求小明连续两天都遇上拥挤的概率;
 (II) 设 X 是小明游览期间遇上舒适的天数, 求 X 的分布列和数学期望;
 (III) 由图判断从哪天开始连续三天游览舒适度的方差最大? (结论不要求证明)

17. (本小题共 14 分)

如图, 在几何体 $ABCDEF$ 中, 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$, $EA = ED = AB = 2EF$, $EF \parallel AB$, M 为 BC 中点.

- (I) 求证: $FM \parallel$ 平面 BDE ;
 (II) 求直线 CF 与平面 BDE 所成角的正弦值;
 (III) 在棱 CF 上是否存在点 G , 使 $BG \perp DE$? 若存在, 求 $\frac{CG}{CF}$ 的值; 若不存在, 说明理由.





18. (本小题共 13 分)

设函数 $f(x) = (x^2 + ax - a) \cdot e^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

(I) 当 $a=0$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程;

(II) 设 $g(x) = x^2 - x - 1$, 若对任意的 $t \in [0, 2]$, 存在 $s \in [0, 2]$ 使得 $f(s) \geq g(t)$ 成立, 求 a 的取值范围.

19. (本小题共 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$, 右焦点为 $F(1, 0)$, 点 M 是椭圆

C 上异于左、右顶点 A, B 的一点.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若直线 AM 与直线 $x=2$ 交于点 N , 线段 BN 的中点为 E , 证明: 点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上.

20. (本小题共 13 分)

对于 n 维向量 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 若对任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 均有 $a_i = 0$ 或 $a_i = 1$, 则

称 A 为 n 维 T 向量. 对于两个 n 维 T 向量 A, B , 定义 $d(A, B) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$.

(I) 若 $A = (1, 0, 1, 0, 1), B = (0, 1, 1, 1, 0)$, 求 $d(A, B)$ 的值.

(II) 现有一个 5 维 T 向量序列: A_1, A_2, A_3, \dots , 若 $A_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ 且满足: $d(A_i, A_{i+1}) = 2, i \in \mathbf{N}^+$. 求证: 该序列中不存在 5 维 T 向量 $(0, 0, 0, 0, 0)$.

(III) 现有一个 12 维 T 向量序列: A_1, A_2, A_3, \dots , 若 $A_1 = (1, 1, \dots, 1)$ 且满足: $d(A_i, A_{i+1}) = m, m \in \mathbf{N}^+, i = 1, 2, 3, \dots$, 若存在正整数 j 使得 $A_j = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{12\text{个}}, A_j$ 为 12 维 T 向量序列中的项, 求出所有的 m .



北京市东城区 2016—2017 学年度第二学期高三综合练习(二)

2017.5

高三数学(理科)参考答案及评分标准

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. A 2. B 3. C 4. B 5. D 6. A 7. C 8. C

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分)

9. (1,2) 10. 1 11. 14 12. $2\sqrt{3}-1$ 13. $\sqrt{21}$ 14. $(1, +\infty) \cup (-4, -2) \cup (2, 4)$

三、解答题(本大题共 6 小题,共 80 分)

15. (共 13 分)

解:(I) 因为 $f(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} + a \cdot \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = 2$,

$$\text{所以 } \frac{3}{2} + a \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

所以 $a = 1$ 6 分

$$\begin{aligned} \text{(II) 由题意 } f(x) &= \sqrt{3+a^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+a^2}} \sin 2x + \frac{a}{\sqrt{3+a^2}} \cos 2x \right) \\ &= \sqrt{3+a^2} \sin(2x+\varphi), \text{ 其中 } \tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } T = \pi, \text{ 且 } \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以当 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时, } y_{\max} = f(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{3+a^2} \sin(\frac{\pi}{6} + \varphi).$$

$$\text{所以 } \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{所以 } \tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, a = 3.$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{3}).$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$ 13 分

16. (共 13 分)

解: 设 A_i 表示事件“小明 8 月 11 日起第 i 日连续两天游览主题公园”($i=1, 2, \dots, 9$).

根据题意, $P(A_i) = \frac{1}{9}$, 且 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$.

(I) 设 B 为事件“小明连续两天都遇上拥挤”,

$$\text{则 } B = A_1 \cup A_7.$$

$$\text{所以 } P(B) = P(A_1 \cup A_7) = P(A_1) + P(A_7) = \frac{2}{9}. \text{ 5 分}$$



(II)由题意,可知 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$, 且

$$P(X=0) = P(A_1 \cup A_7 \cup A_8) = P(A_1) + P(A_7) + P(A_8) = \frac{1}{3},$$

$$P(X=1) = P(A_3 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_9) = P(A_3) + P(A_5) + P(A_6) + P(A_9) = \frac{4}{9},$$

$$P(X=2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{9}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

故 X 的期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$ 11分

(III)从 8 月 16 日开始连续三天游览舒适度的方差最大. 13分

17. (共 14 分)

解:(I)取 CD 中点 N , 连结 MN, FN .

因为 N, M 分别为 CD, BC 中点,

所以 $MN \parallel BD$.

又 $BD \subset$ 平面 BDE 且 $MN \not\subset$ 平面 BDE ,

所以 $MN \parallel$ 平面 BDE .

因为 $EF \parallel AB, AB = 2EF$,

所以 $EF \parallel CD, EF = DN$.

所以四边形 $EFND$ 为平行四边形. 所以 $FN \parallel ED$.

又 $ED \subset$ 平面 BDE 且 $FN \not\subset$ 平面 BDE .

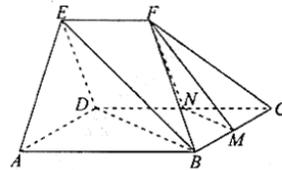
所以 $FN \parallel$ 平面 BDE .

又 $FN \cap MN = N$,

所以平面 $MFN \parallel$ 平面 BDE .

又 $FM \subset$ 平面 MFN ,

所以 $FM \parallel$ 平面 BDE 4分



(II)取 AD 中点 O , 连结 EO, BO .

因为 $EA = ED$, 所以 $EO \perp AD$.

因为平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $EO \perp$ 平面 $ABCD, EO \perp BO$.

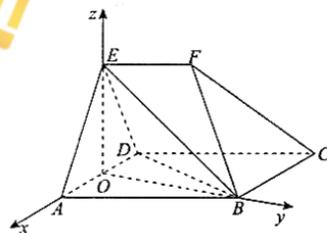
因为 $AD = AB, \angle DAB = 60^\circ$,

所以 $\triangle ADB$ 为等边三角形.

因为 O 为 AD 中点,

所以 $AD \perp BO$.

因为 EO, BO, AO 两两垂直, 设 $AB = 4$, 以 O 为原点, OA, OB, OE 为 x, y, z 轴,





如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 6 分

由题意,得 $A(2,0,0), B(0,2\sqrt{3},0), C(-4,2\sqrt{3},0), D(-2,0,0),$

$E(0,0,2\sqrt{3}), F(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3}).$

$\overrightarrow{CF} = (3, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{DE} = (2, 0, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{BE} = (0, -2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}).$

设平面 BDE 的法向量为 $n = (x, y, z),$

$$\text{则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y - z = 0, \\ x + \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $z = 1,$ 则 $y = 1, x = -\sqrt{3}.$

所以 $n = (-\sqrt{3}, 1, 1).$

设直线 CF 与平面 BDE 成角为 $\alpha,$

$$\sin \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{CF}, n \rangle| = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

所以直线 CF 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}.$ 10 分

(III) 设 G 是 CF 上一点, 且 $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CF}, \lambda \in [0, 1].$

因此点 $G(3\lambda - 4, -\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\lambda).$

$\overrightarrow{BG} = (3\lambda - 4, -\sqrt{3}\lambda, 2\sqrt{3}\lambda).$

由 $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{DE} = 0,$ 解得 $\lambda = \frac{4}{9}.$

所以在棱 CF 上存在点 G 使得 $BG \perp DE,$ 此时 $\frac{CG}{CF} = \frac{4}{9}.$ 14 分

18. (共 13 分)

解: (I) 当 $a = 0$ 时, 因为 $f(x) = x^2 \cdot e^{-x},$

所以 $f'(x) = (-x^2 + 2x) \cdot e^{-x}, f'(-1) = -3e.$

又因为 $f(-1) = e,$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为

$y - e = -3e(x + 1),$ 即 $3ex + y + 2e = 0.$ 4 分

(II) “对任意的 $t \in [0, 2],$ 存在 $s \in [0, 2]$ 使得 $f(s) \geq g(t)$ 成立” 等价于 “在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x)$ 的最大值大于或等于 $g(x)$ 的最大值”.

因为 $g(x) = x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4},$

所以 $g(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值为 $g(2) = 1.$

$f'(x) = (2x + a) \cdot e^{-x} - (x^2 + ax - a) \cdot e^{-x}$

$$= -e^{-x} [x^2 + (a-2)x - 2a]$$

$$= -e^{-x} (x-2)(x+a)$$

令 $f'(x) = 0,$ 得 $x = 2$ 或 $x = -a.$

① 当 $-a \leq 0,$ 即 $a \geq 0$ 时,



$f'(x) \geq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为单调递增函数,

$f(x)$ 的最大值为 $f(2) = (4+a) \cdot \frac{1}{e^2}$,

由 $(4+a) \cdot \frac{1}{e^2} \geq 1$, 得 $a \geq e^2 - 4$.

② 当 $0 < -a < 2$, 即 $-2 < a < 0$ 时,

当 $x \in (0, -a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为单调递减函数;

当 $x \in (-a, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为单调递增函数.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = -a$ 或 $f(2) = (4+a) \cdot \frac{1}{e^2}$,

由 $-a \geq 1$, 得 $a \leq -1$; 由 $(4+a) \cdot \frac{1}{e^2} \geq 1$, 得 $a \geq e^2 - 4$.

又因为 $-2 < a < 0$, 所以 $-2 < a \leq -1$.

③ 当 $-a \geq 2$, 即 $a \leq -2$ 时,

$f'(x) \leq 0$ 在 $[0, 2]$ 上恒成立, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为单调递减函数,

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = -a$.

由 $-a \geq 1$, 得 $a \leq -1$,

又因为 $a \leq -2$, 所以 $a \leq -2$.

综上所述, 实数 a 的值范围是 $a \leq -1$ 或 $a \geq e^2 - 4$ 13 分

19. (共 14 分)

$$\text{解: (I) 由题意, 得 } \begin{cases} b = \sqrt{3}, \\ c = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解得 } a = 2.$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(II) “点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上”等价于“ EF 平分 $\angle MFB$ ”.

设直线 AM 的方程为 $y = k(x+2)$ ($k \neq 0$), 则 $N(2, 4k), E(2, 2k)$.

$$\text{设点 } M(x_0, y_0), \text{ 由 } \begin{cases} y = k(x+2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{得 } \begin{cases} x_0 = \frac{-8k^2+6}{3+4k^2}, \\ y_0 = \frac{12k}{3+4k^2}. \end{cases}$$

① 当 $MF \perp x$ 轴时, $x_0 = 1$, 此时 $k = \pm \frac{1}{2}$,

所以 $M(1, \pm \frac{3}{2}), N(2, \pm 2), E(2, \pm 1)$.

此时, 点 E 在 $\angle BFM$ 的角平分线所在的直线 $y = x - 1$ 或 $y = -x + 1$ 上,
即 EF 平分 $\angle MFB$.



②当 $k \neq \pm \frac{1}{2}$ 时, 直线 MF 的斜率为 $k_{MF} = \frac{y_0}{x_0 - 1} = \frac{4k}{1 - 4k^2}$,

所以直线 MF 的方程为 $4kx + (4k^2 - 1)y - 4k = 0$.

所以点 E 到直线 MF 的距离

$$d = \frac{|8k + 2k(4k^2 - 1) - 4k|}{\sqrt{16k^2 + (4k^2 - 1)^2}} = \frac{|4k + 2k(4k^2 - 1)|}{\sqrt{(4k^2 + 1)^2}} \\ = \frac{|2k(4k^2 + 1)|}{|4k^2 + 1|} = |2k| = |BE|.$$

即点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上. 14 分

20. (共 13 分)

解: (I) 由于 $A = (1, 0, 1, 0, 1), B = (0, 1, 1, 1, 0)$, 由定义 $d(A, B) = \sum_{i=1}^5 |a_i - b_i|$,

可得 $d(A, B) = 4$ 4 分

(II) 反证法: 若结论不成立, 即存在一个含 5 维 T 向量序列 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$,

使得 $A_1 = (1, 1, 1, 1, 1), A_m = (0, 0, 0, 0, 0)$.

因为向量 $A_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ 的每一个分量变为 0, 都需要奇数次变化,

不妨设 A_1 的第 $i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 个分量 1 变化了 $2n_i - 1$ 次之后变成 0,

所以将 A_1 中所有分量 1 变化为 0 共需要

$$(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + (2n_3 - 1) + (2n_4 - 1) + (2n_5 - 1) =$$

$$2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 - 2) - 1 \text{ 次, 此数为奇数.}$$

又因为 $d(A_i, A_{i+1}) = 2, i \in \mathbb{N}^+$, 说明 A_i 中的分量有 2 个数值发生改变,

进而变化到 A_{i+1} , 所以共需要改变数值 $2(m-1)$ 次, 此数为偶数, 所以矛盾.

所以该序列中不存在 5 维 T 向量 $(0, 0, 0, 0, 0)$ 9 分

(III) 此时 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ 13 分



扫描二维码, 关注自主招生在线官方微信!

查看更多自主招生相关资讯!

