济洛平许 2022—2023 学年高三第四次质量检测
文科数学参考答案

一、选择题： BDCDB CACBC DA

二、填空题： 13. 2 14. $-\dfrac{1}{2}$ 15. 538 16. $[16\pi,25\pi]$

三、解答题：

17. 解：（1）因为 $10m=1-10\times(0.003+2\times0.006+0.009+2\times0.012+2\times0.016)$，

所以 $m=0.02$. ……………………2 分

又因为 $(x-60)\times0.02=0.04$，所以 $x=62$. ……………………4 分

$n=0.03\times15+0.06\times25+\cdots\cdots+0.06\times95=60.2$. ……………………6 分

（2）

	高敏感	低敏感	总计
男生	80	160	240
女生	80	240	320
总计	160	400	560

……………………8 分

$$K^2=\frac{560(80\times240-80\times160)^2}{(80+80)(160+240)(80+160)(80+240)}=\frac{14}{3}\approx 4.667>3.841.$$ ………………11 分

故有 95%的把握认为学生性别与国家安全知识敏感度有关. ………12 分

18. 解：（1）由 $c=2(a\cos C-b)$ 得 $2a\cos C=c+2b$ 由正弦定理得

$2\sin A\cos C=\sin C+2\sin B=\sin C+2\sin(A+C)=\sin C+2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$.

所以 $2\cos A\sin C+\sin C=0$. ……………………4 分

又因为 $C\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin C\neq0$，所以 $\cos A=-\dfrac{1}{2}$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………6 分

(2)由 $c^2+a^2=b^2+\sqrt{3}ac$ 得 $c^2+a^2-b^2=\sqrt{3}ac$，故 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$. 所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………7 分

可得 $b=c=2$，$a=BC=2\sqrt{3}$. ……………………8 分

设 $BM=m,CM=n$，在 ΔBMC 中，$\angle BMC=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理可得

$a^2=m^2+n^2-2mn\cos\dfrac{\pi}{3}=m^2+n^2-mn=12$. ……………………9 分

所以 $12=m^2+n^2-mn\geq2mn-mn=mn$，所以 $mn\leq12$ (当且仅当 $m=n=2\sqrt{3}$ 时取等号). …10 分

所以 $S_{\Delta MBC}=\dfrac{1}{2}mn\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}mn\leq\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times12=3\sqrt{3}$. ……………………11 分

故 ΔBMC 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$. ……………………12 分

19.(1)证明：设 BD 交 AC 于点 O，连接 EO，FO，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$.

因为 $ED\perp$ 平面 $ABCD, AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp ED$.

又 $ED\cap BD=D$，所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$；所以 $AC\perp EO$. ……………………2 分

设 $FB=1$，由题意得 $ED=2$，$BD=2\sqrt{2}$，$DO=BO=\sqrt{2}$.

因为 $FB//ED$，所以 $FB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $OF=\sqrt{3}$，$EO=\sqrt{6}$，$EF=3$.

因为 $EF^2=OE^2+OF^2$，所以 $EO\perp FO$. ……………………4 分

因为 $OF\cap AC=O$，所以 $EO\perp$ 平面 ACF. ……………………5 分

又 $EO\subset$ 平面 EAC，　所以平面 $EAC\perp$ 平面 FAC. ……………………6 分

（2）由（1）可知 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，所以 $AC\perp OF$，由（1）所设可知 $OE=\sqrt{6}$，$OF=\sqrt{3}$.

因为 $EO\perp$ 平面 ACF，所以 $V_1=\frac{1}{3}S_{\Delta AFC}\cdot EO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot OF\cdot OE=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$. …………… 8 分

由（1）可知 $FB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FB\perp$ 平面 ABC. 又 $FB=1, BO=\sqrt{2}$，

所以 $V_2=V_{A-BFC}=V_{F-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot FB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot BO\cdot FB=\frac{\sqrt{2}}{6}AC$. ……………………11 分

所以 $\frac{V_1}{V_2}=3$. ……………………12 分

20.（1）　$b=1$，则 $e^2=1-\frac{1}{a^2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=2$． 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4 分

（2）当 l 斜率不为 0 时,设 $l:x=ny+3$，联立 $\begin{cases}x=ny+3,\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow(n^2+4)y^2+6ny+5=0$. ………5 分

$\Delta=36n^2-20(n^2+4)=16n^2-80>0\Rightarrow n^2>5$.

设 $Q(s,t),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=-\frac{6n}{n^2+4},y_1y_2=\frac{5}{n^2+4}$. ……………………6 分

直线 $MQ:y-t=\frac{y_1-t}{x_1-s}(x-s)$，令 $x=3$ 得

$$y_A=t+\frac{y_1-t}{x_1-s}(3-s)=\frac{t(x_1-s)+(y_1-t)(3-s)}{x_1-s}=\frac{t(ny_1+3-s)+(y_1-t)(3-s)}{ny_1+3-s}$$

$$=\frac{tny_1+(3-s)y_1}{ny_1+3-s}=\frac{(tn+3-s)y_1}{ny_1+3-s}.$$ ……………………7 分

同理可得 $y_B=\frac{(tn+3-s)y_2}{ny_2+3-s}$. ……………………8 分

于是$|PA|=|PB|\Leftrightarrow|y_A|=|y_B|$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{(tn+3-s)y_1}{ny_1+3-s}\right|=\left|\frac{(tn+3-s)y_2}{ny_2+3-s}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{y_1}{ny_1+3-s}\right|=\left|\frac{y_2}{ny_2+3-s}\right|.$$

若$\frac{y_1}{ny_1+3-s}=\frac{y_2}{ny_2+3-s}$，则由$s<3\Rightarrow y_1=y_2$，与直线$l$的任意性矛盾；…………………9 分

若$\frac{y_1}{ny_1+3-s}=-\frac{y_2}{ny_2+3-s}$，则$y_1\left(ny_2+3-s\right)+y_2\left(ny_1+3-s\right)=0$

$\Rightarrow 2ny_1y_2+(3-s)(y_1+y_2)=0\Rightarrow 10n-6n(3-s)=0\Rightarrow -8+6s=0\Rightarrow s=\frac{4}{3}$. …………11 分

所以点Q的坐标为$\left(\frac{4}{3},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$或$\left(\frac{4}{3},-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$(当$l$斜率为 0 时也成立). ……………………12 分

21. 解：（1）对函数求导可得：$f'(x)=e^x(\frac{1}{x}+\ln x)$. ……………………1 分

令$s(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ 则$s'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$

当$x\in(0,1)$时，$s'(x)<0,m(x)$单调递减，$x\in(1,+\infty)$时，$s'(x)>0,s(x)$单调递增. ………2 分

所以$s(x)_{\min}=s(1)=1>0$，所以$f'(x)=s(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增. ………3 分

故$f(x)$的单调递增区间是:$(0,+\infty)$，无递减区间. …………………… 4 分

（2）由题意得：$g(x)=\frac{x}{e^x}$，$g(x_1)=g(x_2)$

则$\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}\Rightarrow\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}=\frac{x_1}{x_2}=e^{x_1-x_2}$， ……………………5 分

设$\frac{x_1}{x_2}=t(t>1)$，$x_1-x_2=\ln t$，可得$x_2=\frac{\ln t}{t-1}$，$x_1=\frac{t\ln t}{t-1}$， ……………………6 分

欲证$x_1x_2<1$，即证$t\left(\frac{\ln t}{t-1}\right)^2<1$， ……………………7 分

只需证$\ln t<\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}(t>1)$（*） ……………………8 分

设$h(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，$x>1$， ……………………9 分

则$h'(x)=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}$，在$(1,+\infty)$上，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

所以$h(x)<h(1)=0$，所以$\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0(x>1)$

从而，命题得证. …………………… 1 2 分

22. 解：（1）曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{4}{\cos\theta}$，根据公式 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 可得：$x=4$，

所以曲线 C_2 直角坐标方程为：$x=4$． ……………………2 分

曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=t^2+\dfrac{1}{t^2}, \\ y=t^2-\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数），即：$x^2-y^2=4$． 又 $t^2+\dfrac{1}{t^2}\geq 2$，

所以曲线 C_1 的普通方程为 $x^2-y^2=4(x\geq 2)$． ……………………5 分

（2）曲线 C_1，C_2 的交点为 $P_1(4,2\sqrt{3})$，$P_2(4,-2\sqrt{3})$，点 M 的坐标为 $(-2,0)$． ……………………6 分

圆 C_3 的方程为：$(x-2)^2+y^2=16$．其极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-12=0$． ……………………7 分

设直线 l_1，l_2 的极坐标方程分别为 $\theta=\theta_1(\rho\in\mathrm{R})$，$\theta=\theta_2(\rho\in\mathrm{R})$，

分别代入圆 C_3 的极坐标方程 $\rho^2-4\rho\cos\theta-12=0$ 得，

$\rho^2-4\rho\cos\theta_1-12=0$，　$|OA|\cdot|OB|=|-12|=12$； ……………………8 分

$\rho^2-4\rho\cos\theta_2-12=0$，　$|OC|\cdot|OD|=|-12|=12$． ……………………9 分

所以有 $|OA|\cdot|OB|=|OC|\cdot|OD|$． ……………………10 分

23.解：（1）函数 $g(x)=|x-1|$ 的最小值为 m=0. ……………………2 分

函数 $f(x)=|x-1|+|x|=\begin{cases} 2x-1, & x>1, \\ 1, & 0\leq x\leq 1, \\ 1-2x, & x<0. \end{cases}$ ……………………3 分

函数在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=1$， ……………………4 分

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 n=1. ……………………5 分

（2）由（1）知 $a+b+c=0$，$abc=1$． ……………………6 分

因为 $a+b=-c<0$，$ab=\dfrac{1}{c}>0$，

所以 $a<0, b<0$，$-a>0, -b>0$，$(-a)+(-b)=c=\dfrac{1}{ab}$. ……………………7 分

又因为 $ab=(-a)(-b)<(\dfrac{-a-b}{2})^2\ (a\neq b)$. ……………………8 分

所以 $\dfrac{1}{ab}>(\dfrac{2}{-a-b})^2$，　又 $(-a)+(-b)=\dfrac{1}{ab}$，

所以 $[(-a)+(-b)]^3>4$，　所以 $(-a)+(-b)>\sqrt[3]{4}$． ……………………9 分

所以 $a+b<-\sqrt[3]{4}$． ……………………10 分