高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语，函数与导数，三角函数，三角恒等变换，解三角形，平面向量，数列，不等式，立体几何，直线与圆。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=2x+1\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+3\}$，则 $A\cap B=$

A. $(2,5)$　　B. $\{2,5\}$　　C. $\{(5,2)\}$　　D. $\{(2,5)\}$

2. $\sin 33°\sin 63°+\sin 27°\sin 57°=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

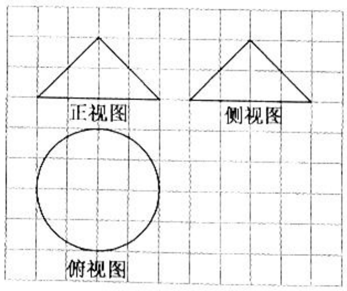
3. 如图为某几何体的三视图(图中小正方形的边长为1)，则该几何体的侧面积为

A. 4π

B. $4\sqrt{2}\pi$

C. 8π

D. $(4+2\sqrt{2})\pi$



4. 要得到函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只要将函数 $g(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象上所有的点

A. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　　B. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

5. 已知点 $A(2,1)$ 在圆 $C: x^2+y^2-2x+my+2=0$ 的外部，则实数 m 的取值范围为

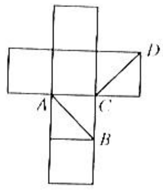
A. $(-3,+\infty)$　　B. $(-3,-2)\cup(2,+\infty)$

C. $(-2,+\infty)$　　D. $(-2,2)\cup(3,+\infty)$

6. 若实数 a,b,c 满足 $3^a=2$，$b=\log_2 5$，$3^c=4$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

7. 如图，某几何体的平面展开图为 6 个小正方形组合而成的图形，则在原几何体中 AB 与 CD 所成角的大小为



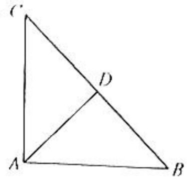
A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

8. 在等腰直角$\triangle ABC$ 中，D 为斜边 BC 的中点，点 P 为$\triangle ACD$ 内一点（含边界），若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，则 λ 的取值范围为



A. $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$

B. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

D. $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

9. “$a=-1$”是“直线 $ax+2y+6=0$ 与直线 $x+(a-1)y+a^2-1=0$ 平行”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. 已知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=1$，过圆 O 外一点 $P(a,b)$ 作圆 O 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，则直线 AB 的方程为

A. $ax-by+1=0$

B. $ax+by-1=0$

C. $bx-ay+1=0$

D. $bx-ay-1=0$

11. 阿波罗尼斯是古希腊著名数学家，与欧几里得、阿基米德并称为亚历山大时期数学三巨匠，他研究发现：如果一个动点 M 与两个定点的距离之比为常数 λ（$\lambda>0$，$\lambda\neq1$），那么点 M 的轨迹为圆（人们称之为阿波罗尼斯圆）。在$\triangle ABC$ 中，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，D 为 AB 的中点，且 $|CD|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，则$\triangle ABC$ 面积的最大值为

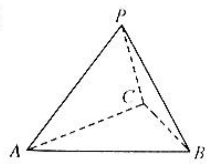
A. $\sqrt{3}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

12. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp PB$，P 到平面 ABC 的距离为 2，则该三棱锥外接球的表面积为



A. 36π

B. 16π

C. $\frac{16\pi}{3}$

D. 4π

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若直线 $ax+2y+1=0$ 与直线 $x\cos\frac{2\pi}{3}+y-1=0$ 互相垂直，则 $a=$________.

14. 已知圆锥的侧面展开图是面积为 2π 的半圆，则圆锥的底面半径为________.

15. “凡八节二十四气，气损益九寸九分六分分之一，冬至晷长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸．问次节损益寸数长短各几何？”这是我国最古老的天文学、数学著作《周髀算经》（公元前 2 世纪）中说明测算二十四节气的方法，大意是：“立一根 8 尺标杆，在每天正午时刻测量影（晷）长．定义一年中影最长的那天为冬至，影最短的那天为夏至，冬至影长 1 350 分，夏至影长 160 分，然后在夏至到冬至之间，冬至到次年夏至之间各安排 11 个节气，每相邻两个节气的影长相差（气损益）$99\frac{1}{6}$ 分，问各节气影长是多少？”按照以上的解释，计算夏至过后的第 6 个节气秋分正午影长是________分．

$160+99\times6$
$160+595$
$=755$

16. 函数 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$ 的最大值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_n=2a_n-1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

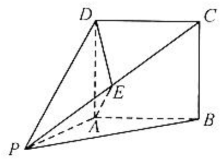
(2)若 $b_n=\dfrac{\log_2 a_{n+1}}{a_n}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$平面 $ABCD$，$PA=AB$，E 为 PC 的中点.

(1)证明：平面 $ADE\perp$平面 PBC；

(2)求直线 PD 与平面 ADE 所成角的大小.

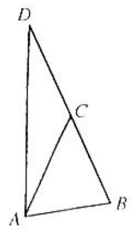


19.（本小题满分 12 分）

已知锐角△ABC 的外接圆的面积为 9π，$AB=4$，$AC=3\sqrt{3}$.

(1)求∠BAC 的正弦值；

(2)设 D 为线段 BC 的延长线上一点，若△ACD 的面积为 $3\sqrt{5}$，求 AD 的长.

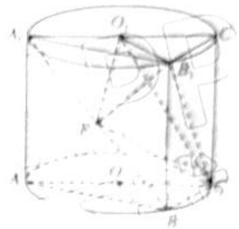


20.（本小题满分 12 分）

如图，在圆柱 OO_1 中，AC、A_1C_1 分别为圆 O、圆 O_1 的直径，AA_1、BB_1、CC_1 为圆柱的母线.

(1)证明：A_1B∥平面 O_1B_1C；

(2)若圆 O 的半径为 2，$\angle BAC=30^{\circ}$，$A_1A=AB$，点 P 为 A_1B 的中点，求三棱锥 $P-O_1B_1C$ 的体积.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+2$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值；

(2)若关于 x 的不等式 $2f(x)+n(x^2+4x)\geq 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求正数 n 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，点 P 满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3$，设点 P 的轨迹为曲线 C.

(1)求曲线 C 的方程；

(2)设点 $D(3,0)$，不与坐标轴垂直的直线 l 与 C 相交于不同的两点 E，F，若 x 轴平分 $\angle EDF$，求证：l 过定点.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $\begin{cases}y=2x+1,\\ y=x+3\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\ y=5,\end{cases}$ 所以 $A\cap B=\{(2,5)\}$. 故选 D.

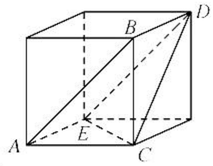
2. C　$\sin 33^\circ\sin 63^\circ+\sin 27^\circ\sin 57^\circ=\sin 33^\circ\cos 27^\circ+\sin 27^\circ\cos 33^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt3}{2}$. 故选 C.

3. B　由三视图知该几何体为圆锥，且其底面半径为 2，高为 2，则母线长为 $2\sqrt2$，故其侧面积为 $\pi\times2\times2\sqrt2=4\sqrt2\pi$. 故选 B.

4. A　将 $g(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，可得 $y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2\pi}{3}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=f(x)$. 故选 A.

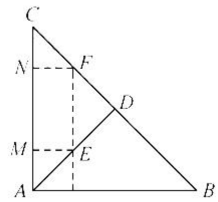
5. B　由题意得 $\begin{cases}(-2)^2+m^2-8>0,\\ 2^2+1^2-2\times2+m-2>0,\end{cases}$ 解得 $-3<m<-2$，或 $m>2$. 故选 B.

6. A　由 $3^a=2$，得 $a=\log_3 2<\log_3 3=1$；$b=\log_2 5>\log_2 4=2$；由 $3^c=4$，得 $c=\log_3 4$，又 $\log_3 3<\log_3 4<\log_3 9$，所以 $1<c<2$，所以 $a<c<b$. 故选 A.



7. C　该平面展开图为正方体的平面展开图，该几何体的直观图如图所示，把 AB 平移到 DE 位置，则 $\angle CDE$ 为 AB 与 CD 所成的角，连接 CE，易知 $\triangle CDE$ 为等边三角形，所以 $\angle CDE=\frac{\pi}{3}$. 故选 C.

8. D　法一：过 AB 靠近 A 的四等分点作 AC 的平行线分别交 AD，BC 于点 E，F，由题意知，点 P 在线段 EF 上，过 E，F 分别作 AB 的平行线交 AC 于点 M，N(如图)，易求得 $\overrightarrow{AM}=\frac14\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AN}=\frac34\overrightarrow{AC}$，故 $\lambda_{\min}=\frac14$，$\lambda_{\max}=\frac34$，所以 $\frac14\leqslant\lambda\leqslant\frac34$. 故选 D.



法二：设 $AB=AC=4$，以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的方向为 x 轴，y 轴的正方向建立直角坐标系，则 $\overrightarrow{AP}=\frac14(4,0)+\lambda(0,4)=(1,4\lambda)$，要使点 P 为 $\triangle ACD$ 内一点(含边界)，则 $1\leqslant4\lambda\leqslant3$，即 $\frac14\leqslant\lambda\leqslant\frac34$. 故选 D.

9. C　由直线 $ax+2y+6=0$ 与直线 $x-(a-1)y+a^2-1=0$ 平行，得 $a(a-1)=2$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$. 当 $a=2$ 时，两直线重合；当 $a=-1$ 时，两直线平行. 于是“$a=-1$”是“直线 $ax+2y+6=0$ 与直线 $x-(a-1)y+a^2-1=0$ 平行”的充要条件. 故选 C.

10. B　法一：由题意知点 O，A，P，B 在以 OP 为直径的圆上，易求该圆的方程为 $x^2+y^2-ax-by=0$，AB 为圆 $x^2+y^2-1=0$ 与圆 $x^2+y^2-ax-by=0$ 的公共弦，将这两圆的方程的两端分别相减，得 $ax+by-1=0$，即 AB 的方程为 $ax+by-1=0$. 故选 B.

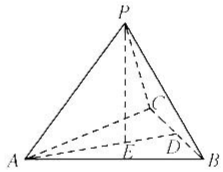
法二：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则切线 PA，PB 的方程分别为 $x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$. 由 $P(a,b)$ 在 PA，PB 上，得 $x_1a+y_1b=1$，$x_2a+y_2b=1$；显然 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 都适合方程 $ax+by=1$，而过两点有且只有一条直线，所以直线 AB 的方程为 $ax+by-1=0$. 故选 B.

11. D　法一：因为 D 为 AB 的中点，且 $|CD|=\frac{\sqrt3}{2}|AB|$，所以 $\frac{|CD|}{|DB|}=\sqrt3$，设点 $D(x,y)(y\neq0)$，则 $\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=\sqrt3(y\neq0)$，化简得 $(x+2)^2+y^2=3(y\neq0)$，其圆心为 $(-2,0)$，则圆上点到 BC 的最大距离为 $\sqrt3$，所以点 A 到 BC 的最大距离为 $2\sqrt3$，所以 $\triangle ABC$ 的最大面积 $S=\frac12\times2\times2\sqrt3=2\sqrt3$. 故选 D.

法二：设 $A(x,y)(y\neq 0)$，则 $D\left(\frac{x-1}{2},\frac{y}{2}\right)$，由 $|CD|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，得 $\left(\frac{x-1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{3}{4}[(x+1)^2+y^2]$，化简得 $(x+3)^2+y^2=(2\sqrt{3})^2(y\neq 0)$，$A$ 点轨迹为圆(与 x 轴的交点除外)，其圆心为 $(-3,0)$，则圆上的点到 BC 的最大距离为 $2\sqrt{3}$，即点 A 到 BC 的最大距离为 $2\sqrt{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的最大面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. 故选 D.

12. A　法一：作 $PE\perp$ 平面 ABC，垂足为 E，连接 AE 并延长交 BC 于 D，则 E 为等边 $\triangle ABC$ 的中心. 因为 $PA\perp PB$，由正三棱锥的性质知，PA,PB,PC 两两垂直. 设 $AB=2a$，则 $AE=\frac{2}{3}AD=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，$PA=PB=\sqrt{2}a$，又 $PA^2=PE^2+AE^2$，所以 $2a^2=\frac{4a^2}{3}+4$，解得 $a=\sqrt{6}$，所以 $PA=PB=PC=2\sqrt{3}$. 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=\sqrt{36}=6$，所以 $R=3$. 故所求外接球的表面积为 36π. 故选 A.

法二：因为 $PA\perp PB$，由正三棱锥的性质知，PA,PB,PC 两两垂直且相等. 设 $PA=PB=PC=a$，则 $AB=BC=CA=\sqrt{2}a$. 根据 $V_{三棱锥P-ABC}=V_{三棱锥A-PBC}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a^2\times a=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}a)^2\sin 60^\circ\times 2$，解得 $a=2\sqrt{3}$. 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=\sqrt{36}=6$，所以 $R=3$. 故所求外接球的表面积为 36π. 故选 A.

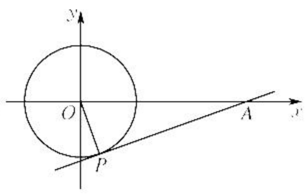


13. 4　由题意得 $a\cos\frac{2\pi}{3}+2=0$，解得 $a=4$.

14. 1　设圆锥的母线长为 l，底面半径为 r，由题意知 $\frac{1}{2}\pi l^2=2\pi$，所以 $l=2$，所以 $2\pi r=\pi l=2\pi$，所以 $r=1$.

15. 755　由题意知，把夏至影子的长 160 作为首项，各节气那天影子的长构成公差为 $99\frac{1}{6}$ 的等差数列 $\{a_n\}$，夏至后的第 6 个节气秋分那天影子的长度应为数列的第 7 项，所以 $a_7=a_1+6d=160-6\times\frac{595}{6}=755$.

16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　法一：$f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}=\frac{\sin 2x}{1+\frac{1-\cos 2x}{2}}=\frac{2\sin 2x}{3-\cos 2x}$，令 $t=\frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}$，则 t 表示点 $P(\cos 2x,-\sin 2x)$ 与点 $A(3,0)$ 连线的斜率，显然点 P 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上，当 AP 与圆 O 相切时 AP 的斜率取得最大值或最小值(如图). $|OA|=3$，$|OP|=1$，所以 $|AP|=2\sqrt{2}$，所以 $\tan\angle OAP=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $t_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



法二：由方法一，知 $t=\frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}$，即 $\sin 2x+t\cos 2x=3t$，$\sqrt{1+t^2}\sin(2x+\varphi)=3t$(其中 $\tan\varphi=t$)，因为 $|\sin(2x+\varphi)|\leqslant 1$，所以 $3t\leqslant\sqrt{1+t^2}$，解得 $t_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以 $f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17. 解：(1)因为 $S_n=2a_n-1$，

所以当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$. ………………………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$.

两式相减，得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，所以 $a_n=2a_{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$. ………………………… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列.

所以 $a_n=2^{n-1}$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $b_n=\frac{\log_2 2^n}{2^{n-1}}=\frac{n}{2^{n-1}}$. ………………………………………………………………… 6 分

所以 $T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$.

两边同乘以 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$. ………………………………………… 7 分

两式相减，得 $\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$. ……………… 9 分

所以 $T_n=4-\frac{n+2}{2^{n+1}}$. …………………………………………………………………… 10 分

18. (1)证明：取 PB 的中点 F，连接 EF，AF，则 $EF/\!/BC$，又 $AD/\!/BC$，所以 $EF/\!/AD$，

所以 A，D，E，F 四点共面. …………………………………………………………………… 1 分

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$PA\subset$平面 PAB，所以平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$. ………………………… 2 分

又平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$DA\perp AB$，$DA\subset$平面 $ABCD$，

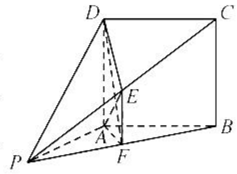
所以 $DA\perp$平面 PAB，又 $PB\subset$平面 PAB，所以 $PB\perp DA$. ……………………………………… 4 分

因为 $PA=AB$，F 为 PB 的中点，所以 $PB\perp AF$. ………………………………………………… 5 分

因为 $AF\cap DA=A$，DA，$AF\subset$平面 ADE，所以 $PB\perp$平面 ADE.

因为 $PB\subset$平面 PBC，所以平面 $ADE\perp$平面 PBC. …………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)知 $PF\perp$平面 $ADEF$，连接 DF，则$\angle PDF$ 为 PD 与平面 $ADEF$ 所成的角.



……………………………………………………………………………… 8 分

不妨设 $PA=2$，则 $AB=AD=2$，$AF=\sqrt{2}$. ………………………………………… 9 分

所以 $DF=\sqrt{6}$，$PD=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\angle PDF=\frac{DF}{PD}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………… 11 分

又$\angle PDF\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\angle PDF=\frac{\pi}{6}$.

即 PD 与平面 ADE 所成的角为$\frac{\pi}{6}$. …………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为$\triangle ABC$ 外接圆的面积为 9π，所以$\triangle ABC$ 的外接圆的半径 $r=3$. ……………………… 1 分

由正弦定理知$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin B}=6$. …………………………………………………………… 2 分

又 $AB=4$，$AC=3\sqrt{3}$，所以 $\sin B=\frac{AC}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\angle ACB=\frac{AB}{6}=\frac{2}{3}$. ……………………………… 3 分

又 B，$\angle ACB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，$\cos\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{3}$. …………………………………… 4 分

所以 $\sin\angle BAC=\sin[\pi-(B+\angle ACB)]=\sin(B-\angle ACB)$

$=\sin B\cos\angle ACB+\cos B\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{15}+2}{6}$. ……………………………………………… 7 分

(2)由(1)可得 $\sin\angle ACD=\frac{2}{3}$，$\cos\angle ACD=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. ………………………………………………… 8 分

由$\triangle ACD$ 的面积为 $3\sqrt{5}$，得$\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD=3\sqrt{5}$，解得 $CD=\sqrt{15}$. ………………………… 10 分

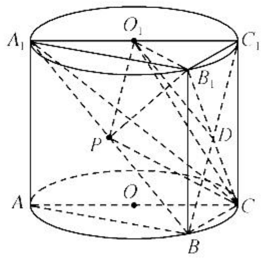
所以 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD=27+15-2\times3\sqrt{3}\times\sqrt{15}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=72$，

所以 $AD=6\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：连接 BC_1 交 B_1C 于点 D，连接 O_1D. …………………………………………………… 1 分

由题意得四边形 BCC_1B_1 为平行四边形，所以 D 为 BC_1 的中点. ……………………………………… 2 分

又 O_1 为 A_1C_1 的中点，所以 $O_1D/\!/A_1B$. ………………………………………… 3 分



因为 $O_1D\subset$平面 O_1B_1C，$A_1B\not\subset$平面 O_1B_1C，

所以 $A_1B/\!/$平面 O_1B_1C. ……………………………………………………… 4 分

(2)解：由(1)知 $A_1B/\!/$平面 O_1B_1C，所以点 P 到平面 O_1B_1C 的距离等于点 A_1 到平面 O_1B_1C 的距离. ……………………………………………………………………… 6 分

所以三棱锥 $P-O_1B_1C$ 的体积等于三棱锥 $A_1-O_1B_1C$ 的体积. ………………………… 7 分

又 $V_{三棱锥A_1-O_1B_1C}=V_{三棱锥C-A_1O_1B_1}$. ………………………………………………… 8 分

由题意知$\angle ABC=90°$，又$\angle BAC=30°$，$AC=4$，

所以 $A_1B_1=AB=2\sqrt{3}$，$A_1O_1=2$.

$\angle B_1A_1O_1=\angle BAC=30^\circ$，$CC_1=AA_1=AB=2\sqrt{3}$，…………………………………………………… 10 分

所以 $V_{三棱锥C-A_1O_1B_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}\sin30^\circ\times2\sqrt{3}=2$，

所以三棱锥 $P-O_1B_1C$ 的体积为 2. …………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $f(x)=(x-2)e^x+2$，所以 $f'(x)=(x-1)e^x$， …………………………………………… 1 分

所以当 $x\in(-\infty,1)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$， ……………………………… 2 分

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$取得极小值，即 $f(x)_{极小}=f(1)=2-e$，无极大值. ………………………… 4 分

(2)设 $h(x)=2f(x)+n(x^2+4x)=2(x-2)e^x+n(x^2+4x)+4$，则 $h'(x)=(2x-2)e^x+2n(x+2)$，

令 $m(x)=(2x-2)e^x+2n(x+2)$，则 $m'(x)=2xe^x+2n$. ……………………………………………… 5 分

因为 $n>0$，$x\geqslant0$，所以 $m'(x)>0$，所以 $m(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，即 $h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $h'(x)\geqslant h'(0)=4n-2$. …………………………………………………………………………………………… 6 分

①若 $4n-2\geqslant0$，即 $n\geqslant\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

则 $h(x)_{\min}=h(0)=0$，所以 $h(x)\geqslant0$ 在$[0,+\infty)$上恒成立； ……………………………………… 8 分

②若 $4n-2<0$，即 $0<n<\frac{1}{2}$时，$h'(0)<0$，又 $h'(1)=6n>0$，

所以存在 $x_0\in(0,1)$，$h'(x_0)=0$. ……………………………………………………………………… 9 分

因为 $h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，又 $h(0)=0$，所以当 $x\in(0,x_0)$时，$h(x)<0$，不合题意.

……… 11 分

综上所述，正数 n 的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. …………………………………………………… 12 分

22. (1)解：设动点 P 的坐标为(x,y)，则$\overrightarrow{PA}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(1-x,-y)$. ………………………… 1 分

因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=3$，即 $x^2-1+y^2=3$， ………………………………………………………………… 3 分

所以曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：由题意知 l 的斜率存在且不为 0，可设直线 l 的方程为 $y=kx+b(k\neq0)$.

由$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\y=kx+b,\end{cases}$消去 y 并化简，得$(k^2+1)x^2+2kbx+b^2-4=0$， ……………………………… 5 分

$\Delta=4k^2b^2-4(k^2+1)(b^2-4)=4(4k^2-b^2+4)>0$，

设 $E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{2kb}{k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{b^2-4}{k^2+1}$， ………………………………… 7 分

由题意知 DE 的斜率与 DF 的斜率之和为 0，即$\frac{y_1}{x_1-3}+\frac{y_2}{x_2-3}=0$， ………………………… 8 分

所以$\frac{y_1(x_2-3)+y_2(x_1-3)}{(x_1-3)(x_2-3)}=0$，即$(kx_1+b)(x_2-3)+(kx_2+b)(x_1-3)=0$，

所以 $2kx_1x_2+(b-3k)(x_1+x_2)-6b=0$，

即 $2k\cdot\frac{b^2-4}{k^2+1}+(b-3k)\cdot\left(-\frac{2kb}{k^2+1}\right)-6b=0$， ………………………………………… 10 分

化简，得 $b=-\frac{4}{3}k$，满足 $\Delta>0$，所以直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\frac{4}{3}\right)$，

所以 l 过定点$\left(\frac{4}{3},0\right)$. ……………………………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。