新疆维吾尔自治区2023年普通高考第三次适应性检测

理科数学参考答案

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	A	D	D	C	B	C	A	C	D	C	A	B

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $\frac{34}{35}$　　14. 2　　15. $\frac{35}{8}$　　16. $\frac{2}{\ln 3}-1$

三、解答题:共70分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解:(1)由 $\cos 2A+2\sin^2\frac{B+C}{2}=1$ 得 $\cos 2A+2\cos^2\frac{A}{2}=1$,所以 $2\cos^2A-1+1+\cos A=1$,

即 $2\cos^2A+\cos A-1=0$,所以 $(2\cos A-1)(\cos A+1)=0$,解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$.

又 $A\in(0,\pi)$,可得 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………………… 6分

(2)由正弦定理得 $\frac{\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$,解得 $\sin B=1$.

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{2}$.

又因为 $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$. …………… 12分

18. 解:(1)存在,当 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线时,$BC\perp AB_1$. 证明如下:

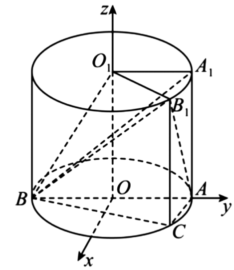
连接 BC,AC,B_1C,因为 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线,所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC,

又因为 $BC\subset$ 平面 ABC,所以 $B_1C\perp BC$. 因为 AB 为圆 O 的直径,所以 $BC\perp AC$.

$BC\perp AC,B_1C\perp BC,AC\cap B_1C=C,AC,B_1C\subset$ 平面 AB_1C,所以 $BC\perp$ 平面 AB_1C,

因为 $AB_1\subset$ 平面 AB_1C,所以 $BC\perp AB_1$. …………………………………………………… 5分

(2) 以 O 为原点，OA，OO_1 分别为 y，z 轴，垂直于 y，z 轴的直线为 x 轴建立空间直角坐标系，如图所示，则 $A_1(0,1,2)$，$O_1(0,0,2)$，$B(0,-1,0)$，因为劣弧 A_1B_1 的长为 $\frac{\pi}{6}$，



所以 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{6}$，$B_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，

$\overrightarrow{O_1B}=(0,-1,-2)$，$\overrightarrow{O_1B_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

设平面 O_1BB_1 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{O_1B}\cdot\boldsymbol{m}=-y-2z=0,\\ \overrightarrow{O_1B_1}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=-3$，解得 $y=\sqrt{3}$，$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\boldsymbol{m}=\left(-3,\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为 x 轴垂直平面 A_1O_1B，所以平面 A_1O_1B 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{-3}{\sqrt{9+3+\frac{3}{4}}}=-\frac{2\sqrt{51}}{17}$，

又二面角 $A_1-O_1B-B_1$ 的平面角为锐角，

故二面角 $A_1-O_1B-B_1$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{51}}{17}$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1) 由题得 $300\times\frac{1050}{1500}=210$，所以应收集 210 位男生的样本数据. ………………… 3 分

(2) 由频率分布直方图得 $1-2\times(0.100+0.025)=0.75$，所以该校学生高考前平均每天睡眠时间超过 4 小时的概率估计值为 0.75. ………………………………………… 6 分

(3) 由(2)知，300 位学生中有 $300\times0.75=225$ 人高考前日均睡眠时间超过 4 小时，75 人的高考前日均睡眠时间不超过 4 小时，又因为样本数据中有 210 份是关于男生的，90 份是关于女生的，所以高考前一周每日平均睡眠时间与性别列联表如下：

	男生	女生	总计
高考前日均睡眠时间不超过 4 小时	45	30	75
高考前日均睡眠时间超过 4 小时	165	60	225
总计	210	90	300

结合列联表可算 $K^2=\frac{300\times(45\times60-165\times30)^2}{75\times225\times210\times90}\approx4.762<6.635$，

所以，没有 99%的把握认为“该校学生的考前一周睡眠时间与性别有关”. …12 分

20. 解：(1) 由题得 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\\ a^2-b^2=1\end{cases}$，得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$， …………………………………………… 3 分

所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，又 $|F_1F_2|=2$，

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6. …………………………………………………… 5 分

(2) 设直线 AB 的方程为 $y=-\sqrt{2}x+m(m>0)$，

因为 AB 与圆 $x^2+y^2=3$ 相切，所以 $\dfrac{|m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，所以 $m=3$. ……………………… 6 分

由 $\begin{cases}y=-\sqrt{2}x+3\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $11x^2-24\sqrt{2}x+24=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{24\sqrt{2}}{11}$，$x_1x_2=\dfrac{24}{11}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+2}\sqrt{\left(\dfrac{24\sqrt{2}}{11}\right)^2-4\times\dfrac{24}{11}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{11}$. ……… 9 分

又 $|AF_2|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\dfrac{x_1^2}{4}\right)}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(x_1-4)^2}=\dfrac{1}{2}(4-x_1)$，

同理 $|BF_2|=\dfrac{1}{2}(4-x_2)$，

所以 $|AF_2|+|BF_2|=4-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=4-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{24\sqrt{2}}{11}=4-\dfrac{12\sqrt{2}}{11}$. ………………… 11 分

所以 $\triangle AF_2B$ 的周长为 $|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4-\dfrac{12\sqrt{2}}{11}+\dfrac{12\sqrt{2}}{11}=4$. …………… 12 分

21. 解：(1) 因为 $g(x)=ax+(a+1)\ln x-\dfrac{1}{x}$，所以 $g'(x)=a+\dfrac{a+1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x+1)(ax+1)}{x^2}(x>0)$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a<0$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $0<x<-\dfrac{1}{a}$；令 $g'(x)<0$，得 $x>-\dfrac{1}{a}$.

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……… 5 分

(2) 方程 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x+x\ln x-1$, 即 $ax+a\ln x=x\mathrm{e}^x$, 等价于 $a\ln(x\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x$.

令 $t=x\mathrm{e}^x>0$, 其中 $x>0$, 则 $a\ln t=t$, 显然 $t\neq 1$.

令 $g(t)=\dfrac{t}{\ln t}$, 则 $g'(t)=\dfrac{\ln t-1}{\ln^2 t}$,

所以 $g(t)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减, 且 $g(t)<0$.

$g(t)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减, 在区间 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(t)_{极小值}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}$.

因为方程 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x+x\ln x-1$ 有两个实根 x_1, x_2,

所以关于 t 的方程 $a=\dfrac{t}{\ln t}$ 有两个实根 t_1, t_2, 且 $t_1=x_1\mathrm{e}^{x_1}$, $t_2=x_2\mathrm{e}^{x_2}$, 所以 $a\in(\mathrm{e},+\infty)$.

要证 $\mathrm{e}^{x_1+x_2}>\dfrac{\mathrm{e}^2}{x_1x_2}$, 即证 $x_1\mathrm{e}^{x_1}\cdot x_2\mathrm{e}^{x_2}>\mathrm{e}^2$, 即证 $t_1t_2>\mathrm{e}^2$, 只需证 $\ln t_1+\ln t_2>2$. ········· 8 分

因为 $\begin{cases}t_1=a\ln t_1\\ t_2=a\ln t_2\end{cases}$, 所以 $\begin{cases}t_1-t_2=a(\ln t_1-\ln t_2)\\ t_1+t_2=a(\ln t_1+\ln t_2)\end{cases}$, 整理可得 $\dfrac{t_1+t_2}{t_1-t_2}=\dfrac{\ln t_1+\ln t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$.

不妨设 $t_1>t_2>0$, 则只需证 $\ln t_1+\ln t_2=\dfrac{t_1+t_2}{t_1-t_2}\ln\dfrac{t_1}{t_2}>2$,

即 $\ln\dfrac{t_1}{t_2}>\dfrac{2(t_1-t_2)}{t_1+t_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{t_1}{t_2}-1\right)}{\dfrac{t_1}{t_2}+1}$. ·· 10 分

令 $s=\dfrac{t_1}{t_2}>1$, $h(s)=\ln s-\dfrac{2(s-1)}{s+1}$, 其中 $s>1$,

因为 $h'(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{4}{(s+1)^2}=\dfrac{(s-1)^2}{s(s+1)^2}>0$, 所以 $h(s)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(s)>h(1)=0$, 故 $\mathrm{e}^{x_1+x_2}>\dfrac{\mathrm{e}^2}{x_1x_2}$. ·· 12 分

二选一试题

22. 解：(1) 由 $x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{2}t=2-x$，代入 $y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t$ 得 C_1 的普通方程为 $x+y-4=0$. …… 2 分

由 $\rho^2=\frac{4}{3\sin^2\theta+1}$ 得 $3\rho^2\sin^2\theta+\rho^2=4$，因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，

所以 C_2 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………… 5 分

(2) 设曲线 C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的任意一点的坐标为 $(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$， …… 6 分

则 M 到 C_1 的距离 $d=\frac{|2\cos\theta+\sin\theta-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}$， ………………………… 7 分

其中 $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………… 8 分

当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，M 到 C_1 的距离最大，此时 $\theta+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，$\theta=\frac{3\pi}{2}-\varphi$，

$\cos\theta=\cos(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=-\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\sin(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=-\cos\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故所求 M 的坐标为 $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. …………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 由题意知 $f(x)=\begin{cases}-4x, x<-\frac{1}{4},\\ 1, -\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{1}{4},\\ 4x, x\geqslant\frac{1}{4},\end{cases}$

令 $f(x)=4$，得 $x=-1$ 或 1.

又 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{1}{4})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{1}{4},+\infty)$ 上单调递增，

故可知 $f(x)<4$ 的解集为 $\{x|-1<x<1\}$. …………………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可知，$f(x)$ 的最小值 $M=1$，

则 $\frac{a+1}{2(a+2)}+\frac{b-1}{b+1}=1$，所以 $1-\frac{1}{a+2}+2-\frac{4}{b+1}=2$，即 $\frac{1}{a+2}+\frac{4}{b+1}=1$.

因为 $a>0$，$b>0$，所以令 $m=a+2>2$，$n=b+1>1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=1$，

所以 $a+b=m+n-3=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)-3=\left(5+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}\right)-3\geqslant5+2\sqrt{\frac{4nm}{nm}}-3=(5+4)-3=6$，

当且仅当 $m=3$，$n=6$，即 $a=1$，$b=5$ 时等号成立. ………………………………… 10 分

以上解法仅供参考，如有其他方法，酌情给分。