题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	C	B	D	C	D	BC	BCD	ABD	BCD

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由 $M=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}=[-1,2]$,$N=\{x\mid y=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\}=[-2,1]$,得 $M\cup N=[-2,2]$. 故选 A.

2. B 【解析】$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$,故选 B.

3. A 【解析】从 5 条线段中任取 3 条,可能的情况有:(2,4,6),(2,4,8),(2,4,10),(2,6,8),(2,6,10),(2,8,10),(4,6,8),(4,6,10),(4,8,10),(6,8,10)共有 10 种可能,其中,能构成三角形的只有(4,6,8),(4,8,10),(6,8,10)共 3 种可能,所以,能构成三角形的概率为$\frac{3}{10}$. 选 A.

4. C 【解析】若数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列,则 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$,故点 $P(n,a_n)$必在一次函数 $y=dx+(a_1-d)$图像上,故 p 真;若 $a_n=2^{n-1}$,则数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列,$\because a_n=2^{n-1}\neq a^n$,$(\forall n\in \mathbf{N}^*)$,$\therefore Q(n,a_n)$不恒在指数函数图像上,故 q 假. 故 C 正确.

5. B 【解析】设事件 A 表示“乘火车”,事件 B 表示“乘轮船”,事件 C 表示“乘飞机”,事件 D 表示“迟到”,则 $P(A)=0.3$,$P(D|A)=0.2$,$P(B)=0.3$,$P(D|B)=0.3$,$P(C)=0.4$,$P(D|C)=0.4$,$D=(D\cap A)\cup(D\cap B)\cup(D\cap C)$,由全概率公式得:$P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=0.3\times0.2+0.3\times0.3+0.4\times0.4=0.31$. 选 B.

6. D 【解析】由条件及公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,得 $50=20+(80-20)e^{-2k}$,故 $k=\frac{1}{2}\ln2$,AB 错误;又由 $35=20+(80-20)e^{-kt}$,$k=\frac{1}{2}\ln2$,得 $t=4$,故牛奶的温度从 80 ℃降至 35 ℃需 4 min,从 50 ℃降至 35 ℃还需 4−2=2 min. 故选 D.

7. C 【解析】连接 NF_2,设$|NF_1|=n$,则$|MF_1|=2n$,$|MF_2|=2a-2n$,$|NF_2|=2a-n$

在 $Rt\triangle MNF_2$ 中

$(3n)^2+(2a-2n)^2=(2a-n)^2$

$\therefore 9n^2+4a^2-8an+4n^2=4a^2-4an+n^2$

$\therefore 12n^2=4an$

$n=\frac{a}{3}$

$\therefore |MF_1|=\frac{2a}{3}$ $|MF_2|=\frac{4a}{3}$

在 $Rt\triangle MF_1F_2$ 中

$4c^2=\frac{4a^2}{9}+\frac{16a^2}{9}$，$\therefore 36c^2=20a^2$

$e^2=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$，又$\because e\in(0,1)$

$\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故选 C.

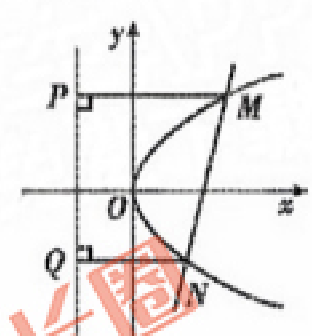
8. D 【解析】设 $f(x)=x^{\frac{1}{2023}}$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $f(2022)<f(2023)$，即 $a<b$；设 $g(x)=\frac{\ln x}{x+1}$，$x>e^2$，则 $g'(x)=\frac{\frac{1+x}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}<\frac{2-\ln x}{(x+1)^2}<0(x>e^2)$，

$g(x)$ 在 $(e^2,+\infty)$ 单调递减，故 $g(2023)<g(2022)$，即 $c<a$；综上得，$b>a>c$. 故 D 正确.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BC 【解析】极差分别为 x_n-x_1 和 $y_n-y_1=2(x_n-x_1)$，$\because x_n-x_1>0$，$\therefore y_n-y_1=2(x_n-x_1)>x_n-x_1$，故 A 错误；由 $y=2x-1=x$ 知，当 $x=1$ 时，平均数相等，故 B 正确；当 $n=2m-1$ 时，中位数分别为 x_m 与 $y_m=2x_m-1$，同理可知当 $x_m=1$ 时，中位数相等，当 $n=2m$ 时，中位数分别为 $\frac{x_m+x_{m+1}}{2}$ 与 $\frac{y_m+y_{m+1}}{2}=\frac{(2x_m-1)+(2x_{m+1}-1)}{2}=2\times\frac{x_m+x_{m+1}}{2}-1$，同理可知当 $\frac{x_m+x_{m+1}}{2}=1$ 时，中位数相等，故 C 正确；由 $s_y=2s_x$，$s_x>0$ 知，$s_y=2s_x>s_x$，标准差不可能相等，故 D 错误. 综上，选 BC.

10. BCD 【解析】设直线 l：$x=ty+m$



联立方程 $\begin{cases}x=ty+m\\y^2=2px\end{cases}$，得 $y^2-2pty-2pm=0$

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

则 $\begin{cases}y_1+y_2=2pt\\y_1y_2=-2pm\end{cases}$

选项 A 若直线 l 过焦点 F，则 $m=\frac{p}{2}$

$\therefore y_1y_2=-p^2$

$P\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$

$\therefore k_{OP}=\frac{y_1}{-\frac{p}{2}}=\frac{2p}{y_2}$

又$\because N\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$$\therefore k_{ON}=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2p}}=\frac{2p}{y_2}=k_{OP}$

$\therefore N,O,P$ 三点共线，$\therefore$A 错

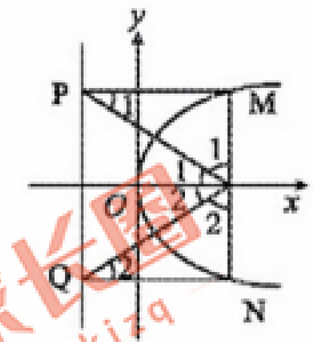
选项 B 由抛物线的定义和平行线的性质知：

$\angle MFP=\angle MPF=\angle PFO=\angle 1$

$\angle NFQ=\angle NQF=\angle QFO=\angle 2$

又 $2(\angle 1+\angle 2)=\pi$，$\therefore \angle 1+\angle 2=\frac{\pi}{2}$

所以 B 对；



选项 C 抛物线 C 在点 M 处的切线为 $y_1y=p(x+x_1)$

抛物线 C 在点 N 处的切线为 $y_2y=p(x+x_2)$，联立得 $\begin{cases} y_1y=p(x_1+x) \\ y_2y=p(x_2+x) \end{cases}$

解得：$x=\frac{y_1y_2}{2p}=-\frac{p}{2}$

抛物线在点 M,N 处的切线的交点在定直线 $x=-\frac{p}{2}$ 上，所以 C 对

选项 D 因为 $OM\perp ON$，$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$，$\therefore \frac{y_1^2}{2p}\frac{y_2^2}{2p}+y_1y_2=0$

将韦达定理代入得：$m=2p$

所以直线 l 恒过点 $(2p,0)$，所以 D 对

11. ABD 【解析】A. 棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球与棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的外接球半径相同，设为 R，则 $2R=\sqrt{6}$，所以 $S=4\pi R^2=6\pi$，所以 A 对

B. 设四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离分别为 d_1,d_2,d_3,d_4，设四面体 $P-ABC$ 的高为 d，由等体积法可得：$\frac{1}{3}s(d_1+d_2+d_3+d_4)=\frac{1}{3}sd$，所以 $d_1+d_2+d_3+d_4=d$ 为定值. 所以 B 对

C. 设 BC 中点为 D，连接 PD,AD，则 $\angle PDA$ 为求，$cos\angle PDA=\frac{3+3-4}{6}=\frac{1}{3}$，所以正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 C 错

D. 要使正四面体 $Q-MNG$ 在四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的外接球在四面体 $P-ABC$ 内切球内部，当正四面体 $Q-MNG$ 的外接球恰好为四面体 $P-ABC$ 内切球时，正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值，由于正四面体的外接球与内球球半径之比为 $\frac{1}{3}$，所以正四面体 $Q-MNG$ 的外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$，设正四面体 $Q-MNG$ 为 a，则 $\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=2\times\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以 $a=\frac{2}{3}$，故体积 $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{2\sqrt{2}}{81}$，所以 D 对

因此：正确答案为 ABD

12. BCD 【解析】因为 $f(x)=0$ 符合条件，故 A. 错误；因为偶函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x+2)=f(-x)=f(x)$，故 B 正确；因为对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，所以对任意 $x\in[0,1]$，取 $x_1=x_2=\frac{x}{2}$ 得 $f(x)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2\geqslant0$；若 $f(1)=1$，即 $f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4=1$，故 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，由 2 知 $f(x)$ 的周期得 $f\left(\frac{2023}{4}\right)=f\left(506-\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，故 C 正确；假设 $f(1)=\frac{1}{2024}$，由 $f(1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4=\frac{1}{2024}$ 及 $f(x)\geqslant0$，$x\in[0,1]$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2024}}$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{2024}}$，故 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$，这与 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增矛盾，故 D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. -40 【解析】$(x-2y)^5(x+y)=x(x-2y)^5+y(x-2y)^5$，所以 x^3y^3 的系数为 $C_5^3(-2)^3+C_5^2(-2)^2=-40$

14. $\frac{48\pi}{5}$ 【解析】由勾股定理知斜边为 5，斜边上的高为$\frac{12}{5}$，该几何体为两个同底面的圆锥，底面半径为$\frac{12}{5}$，两个圆锥的高之和为 5，所以该几何体体积为$\frac{48\pi}{5}$

15. 10

【解析】依题意，$a_1=1$，且 $a_k-a_{k-1}=3k^2-3k+1,(k\geqslant 2)$；$b_1=1$，$b_k=b_{k-1}+\frac{1}{3}b_{k-1}=\frac{4}{3}b_{k-1}$ 所以

$$
\begin{aligned}
a_k&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_k-a_{k-1})\\
&=1+(3\times 2^2-3\times 2+1)+(3\times 3^2-3\times 3+1)+\cdots+(3k^2-3k+1)\\
&=(3\times 1^2-3\times 1+1)+(3\times 2^2-3\times 2+1)+(3\times 3^2-3\times 3+1)+\cdots+(3k^2-3k+1)\\
&=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)-3(1+2+3+\cdots+k)+k\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}-\frac{3k(k+1)}{2}+k=k^3
\end{aligned}
$$

$b_k=\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$.

【注】利用 $a_k-a_{k-1}=3k^2-3k+1=k^3-(k-1)^3,(k\geqslant 2)$求解 a_k 更易.

$b_k=\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$，故小王对第 k 层住宅的购买满意度 $c_k=\dfrac{k^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}$.

【方法一】由$\dfrac{c_{k+1}}{c_k}=\dfrac{(k+1)^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^k}\cdot\dfrac{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}{k^3}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3}{\frac{4}{3}}>1$，即$\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-1\right)k<1$，解得 $k<9.9404$，所以 $c_1<c_2<c_3<\cdots<c_9<c_{10}$，同理有 $c_{10}>c_{11}>c_{12}>\cdots$，小王最想购买第 10 层住宅.

【方法二】设 $f(x)=\dfrac{x^3}{\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}},(x\geqslant 1)$，则 $f'(x)=\dfrac{x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}}\left(3-x\ln\frac{4}{3}\right)$，故 $1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{\ln\frac{4}{3}}$ 时 $f(x)$单调递增；$x\geqslant\dfrac{3}{\ln\frac{4}{3}}$时 $f(x)$单调递减. 由于$\dfrac{3}{\ln\frac{4}{3}}=\dfrac{3}{2\ln 2-\ln 3}\approx 10.4312$，$\dfrac{f(11)}{f(10)}=\dfrac{3\times 11^3}{4\times 10^3}<1$，故 $f(10)$最大，小王最想购买第 10 层住宅.

16. $\left(\frac{3}{4},0\right)$ 【解析】设 $P(t,0)$

则$|PM|=\sqrt{t^2-(t-2)^2}=\sqrt{t^2+3}$

$|PN|=\sqrt{(t-3)^2-6^2+9}=\sqrt{(t-3)^2+27}$

$|PM|+|PN|=\sqrt{t^2+3}+\sqrt{(t-3)^2+27}$

取 $A(0,-\sqrt{3})$，$B(3,3\sqrt{3})$

则$|PM|+|PN|=|PA|+|PB|\geqslant|AB|=\sqrt{3^2+(4\sqrt{3})^2}=\sqrt{57}$

此时，AB 直线：$y+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-0)$

令 $y=0$，则 $x=\frac{3}{4}$

$\therefore P\left(\frac{3}{4},0\right)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(Ⅰ)由函数 $f(x)$ 是偶函数知，$f(-x)=f(x)$. ……………………………………（1 分）

故 $\log_2\frac{m\cdot 4^{-x}+1}{2^{-x}}=\log_2\frac{m\cdot 4^{x}+1}{2^{x}}$，即 $\log_2\frac{m+4^{x}}{2^{x}}=\log_2\frac{m\cdot 4^{x}+1}{2^{x}}$，

化简得，$(m-1)(4^x-1)=0$ 恒成立. ……………………………………（4 分）

故 $m-1$，实数 m 的值为 1. ……………………………………（5 分）

(Ⅱ)若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=x_0$，则 $\log_2\frac{m\cdot 4^{x_0}+1}{2^{x_0}}=x_0$， ……………………（6 分）

即 $m\cdot 4^{x_0}+1=4^{x_0}$，$x_0\in[0,1]$ 能成立.

于是，$m=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_0}$，$x_0\in[0,1]$ ……………………………………（8 分）

由指数函数单调性，得 $m=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{x_0}\in\left[0,\frac{3}{4}\right]$

故实数 m 的取值范围为 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$. ……………………………………（10 分）

【方法二】若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=x_0$，则 $\log_2\frac{m\cdot 4^{x_0}-1}{2^{x_0}}=x_0$， ……………………（6 分）

即 $m\cdot 4^{x_0}+1=4^{x_0}$，$x_0\in[0,1]$ 能成立.

于是，$4^{x_0}=\frac{1}{1-m}$，$x_0\in[0,1]$，

由指数函数单调性，得 $\frac{1}{1-m}=4^{x_0}\in[1,4]$ ……………………………………（8 分）

解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{3}{4}$

故实数 m 的取值范围为 $\left[0,\frac{3}{4}\right]$. ……………………………………（10 分）

……………………………………………………………………（10 分）

18.【解析】(1)设抽取的 3 箱西梅恰有 1 箱是一等品为事件 A_1，

则 $P(A_1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$，

因此，从这 10 箱中任取 3 箱，恰好有 1 箱是一等品的概率为 $\frac{1}{2}$， ……………………（4 分）

(2)由题意可知，从这 10 箱中随机抽取 1 箱恰好是一等品的概率 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，

由题可知 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，则 $\xi\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$

$P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，$P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$，

$P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{8}{125}$，

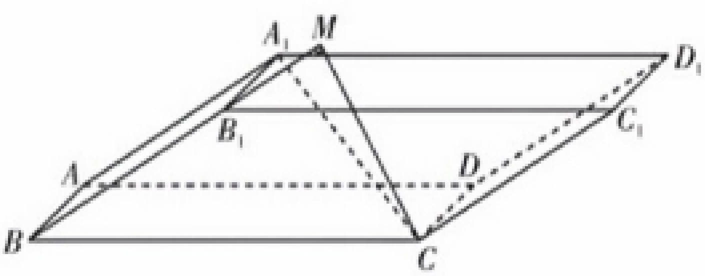
所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……………………（10 分）

$E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ……………………（12 分）

19.（Ⅰ）证明：∵四边形 $ABCD$ 和四边形 ABA_1B_1 均为矩形，



$\therefore AB\perp AA_1$，$AB\perp AD$

又 $\therefore AA_1\cap AD=A$

$\therefore AB\perp$ 平面 AA_1D_1D

$\because A_1D\subset$ 平面 AA_1D_1D

$\therefore AB\perp A_1D$

$\because AB/\!/CD$

$\therefore A_1D\perp DC$ ……………………（4 分）

（Ⅱ）设 $\angle A_1AD=\theta$

$\because A_1D\perp DC$

$\therefore A_1C^2=DC^2+A_1D^2=DC^2+A_1A^2+AD^2-2A_1A\cdot AD\cos\theta$

$\therefore 16=4+12+36-2\times2\sqrt{3}\times6\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \theta\in[0,\pi]$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{6}$， ……………………（6 分）

过 C 点作 CM 垂直交 BB_1 于点 M，由(1)可知 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$\because CM\subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore AB\perp CM$

$\because CM\perp BB_1$，$AB\cap BB_1=B$

$\therefore CM\perp$ 平面 ABB_1A_1，设 AC_1 与平面 BAA_1B_1 所成的角为 α，

又 $\angle B_1BC=\angle A_1AD=\frac{\pi}{6}$，$\therefore CM=6\times\frac{1}{2}=3$

$\because CC_1/\!/$ 平面 AA_1B_1B

$\therefore C_1$ 到平面 AA_1B_1B 的距离等于 3 ……………………（10 分）

在平行四边形 A_1ACC_1 中，$(A_1C)^2+(AC_1)^2=2[(A_1A)^2+(AC)^2]$

$\therefore 16+(AC_1)^2=2(40+12)$，$\therefore AC_1=2\sqrt{22}$

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{CM}{AC_1}=\dfrac{3}{2\sqrt{22}}=\dfrac{3\sqrt{22}}{44}$,

$\therefore AC_1$ 与平面 BAA_1B_1 所成角的正弦值 $\dfrac{3\sqrt{22}}{44}$. ……………………(12 分)

20.【解析】(Ⅰ)数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列. ……………………(1 分)

根据 $a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n, \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ 2^{a_n+2}, \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$ 得

$a_{2n+1}=2^{a_{2n}+2}=2^{\log_2 a_{2n-1}+2}=2^2a_{2n-1}=4a_{2n-1}$; ……………………(3 分)

$\because a_1>0, \therefore a_{2n-1}>0, \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=4$,即数列 $\{a_{2n-1}\}$ 成等比数列. ……………………(4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得,$\therefore a_{2n-1}=a_1\cdot 4^{n-1}, a_{2n}=\log_2 a_{2n-1}=\log_2 a_1+2(n-1)$, ……………………(5 分)

故 $S_{10}=a_1(4^0+4^1+4^2+4^3+4^4)+5\log_2 a_1+2(0+1+2+3+4)=341a_1+5\log_2 a_1+20$

由 $S_{10}=361$,得 $341a_1+5\log_2 a_1+20=361$. ……………………(7 分)

显然,$f(x)=341x+5\log_2 x+20, x>0$ 单调递增,且 $f(1)=361=f(a_1)$,

故 $a_1=1, a_{2n+1}=4^n=2^{2n}, a_{2n+2}=\log_2 a_1+2n=2n$. ……………………(9 分)

$\therefore b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_{2n+1})\cdot a_{2n+2}}=\dfrac{1}{4n^2}, T_1=b_1=\dfrac{1}{4}<\dfrac{7}{4}, T_2=b_1+b_2=\dfrac{5}{16}<\dfrac{7}{16}$ ……………………(10 分)

当 $n\geqslant 3$ 时,$b_n=\dfrac{1}{4n^2}<\dfrac{1}{4(n-1)n}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1}{4}\left[1+\dfrac{1}{2^2}+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{4}=\dfrac{7}{16}$

综上,知 $T_n<\dfrac{7}{16}$. ……………………(12 分)

21.【解析】(1)联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=kx+m\end{cases}$,则 $(9-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-36=0$

又$\because$点 $N(2,9)$ 在直线 $l: y=kx+m$ 上,所以:$9=2k+m$,

$\because 9-4k^2\neq 0$ 时,$\therefore \Delta=64k^2m^2-4(9-4k^2)(-4m^2-36)=0$,则:$m^2=4k^2-9$

所以:$(9-2k)^2=4k^2-9$,即,则 $k=\dfrac{5}{2}$

当 $k=\dfrac{5}{2}$ 时,$m=4$; ……………………(4 分)

所以:直线 l 的方程:$y=\dfrac{5}{2}x+4$ ……………………(5 分)

(Ⅱ)联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=kx+m\end{cases}$,则 $(9-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-36=0$,因为 $k\neq\pm\dfrac{3}{2}$,M 是双曲线与直线的唯一公共点,所以 $\Delta=64k^2m^2-4(9-4k^2)(-4m^2-36)=0$,化简得 $m^2=4k^2-9$,解得点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{4km}{9-4k^2},\dfrac{9m}{9-4k^2}\right)$,即为 $\left(\dfrac{4k}{-m},\dfrac{9}{-m}\right)$ ……………………(7 分)

于是，过点 M 且与 l 垂直的直线为 $y+\frac{9}{m}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{4k}{m}\right)$，可得

$A\left(\frac{13k}{-m},0\right)$，$B\left(0,-\frac{13}{m}\right)$，$P\left(-\frac{13k}{m},-\frac{13}{m}\right)$，……………………………………………………（9 分）

即 $x_1=-\frac{13k}{m}$，$y_1=-\frac{13}{m}$，于是

$x_1^2=\frac{169k^2}{m^2}=\frac{169}{m^2}\left(\frac{m^2+9}{4}\right)=\frac{169}{4}\left(1+\frac{9}{m^2}\right)=\frac{169}{4}\left(1+\frac{9}{\left(-\frac{13}{y_1}\right)^2}\right)=\frac{169}{4}+\frac{9}{4}y_1^2$ ……………………（10 分）

即 P 的轨迹方程为：$\frac{x^2}{\frac{169}{4}}-\frac{y^2}{\frac{169}{9}}=1(y\neq 0)$ ……………………………………………………（11 分）

所以存在定点 $G\left(-\frac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，$H\left(\frac{13\sqrt{13}}{6},0\right)$，使得当点 M 运动时，$||PG|-|PH||$ 为定值 13 …

………………………………………………………………………………………（12 分）

22.【解析】（Ⅰ）函数 $f(x)=x\ln x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$. ……………………………………（1 分）

由 $f'(x)=\ln x+1>0$，得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减；……………………………………（2 分）

由 $f'(x)=\ln x+1<0$，得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

综上知，$f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$，单调递增区间是 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$. ……………………（3 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{e},0\right)$，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上的值域为 $\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$. 注意到 $f(1)=0$，$f(a)=f(b)$. 不妨设 $0<a<\frac{1}{e}<b<1$，则欲证 $a+b<1$，即证 $b<1-a$.

由于 $\frac{1}{e}<b<1-a$，由（Ⅰ）得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，故只需证 $f(b)<f(1-a)$，由已知 $f(a)=f(b)$，即证：$f(a)<f(1-a)$，也即 $f(a)-f(1-a)<0$. ……………………………………（4 分）

【方法一】令 $F(x)=f(x)-f(1-x)$，$0<x<\frac{1}{e}$.

$F'(x)=f'(x)+f'(1-x)=\ln x+\ln(1-x)+2=\ln[x(1-x)]+2$，$0<x<\frac{1}{e}$.

由 $[x(1-x)]=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 单调递增，得 $F'(x)=\ln[x(1-x)]+2$ 单调递增且 $F'(x)=\ln[x(1-x)]+2\in(-\infty,\ln(e-1))$.

由于 $\ln(e-1)>0$，故 $\exists x_0\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 满足 $F'(x_0)=0$. ……………………………………（5 分）

由 $F'(x)$ 单调递增知：

当 $x\in(0,x_0)$ 时 $F'(x)<F'(x_0)=0$，$F(x)$ 单调递减，值域为 $(F(x_0),0)$；……………………（6 分）

当 $x\in\left(x_0,\frac{1}{e}\right)$ 时 $F'(x)>F'(x_0)=0$，$F(x)$ 单调递增，值域为 $\left(F(x_0),-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)$；

………………………………………………………………………………………（7 分）

设 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1,0<x<1$. 则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$，$g(x)$单调递减，故 $g(x)>g(1)=0$，

即 $\ln x>1-\frac{1}{x},0<x<1$. 取 $x=1-\frac{1}{e}$，得 $\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)>1-\frac{1}{1-\frac{1}{e}}$，即 $-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)<0$

综上，得 $F(x)<0$，即 $f(a)-f(1-a)=F(a)<0$，$a+b<1$ 得证. ……………………………… (8分)

【方法二】(重新同构)

$f(a)<f(1-a)\Leftrightarrow a\ln a<(1-a)\ln(1-a)\Leftrightarrow\frac{\ln a}{1-a}<\frac{\ln(1-a)}{a}=\frac{\ln(1-a)}{1-(1-a)}$ ……………………… (5分)

令 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x},0<x<1$，即证：$F(a)<F(1-a)$. 由于 $0<a<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，从而 $0<a<1-a<1$.

故要证 $F(a)<F(1-a)$ 成立，只需 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 单调递增成立即可. ……………………… (6分)

$F'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-x)+\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\frac{1}{x}+\ln x-1}{(1-x)^2}$，令 $G(x)=\frac{1}{x}+\ln x-1,0<x<1$，则 $G'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}<0$，$G(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$G(x)>G(1)=0$，$F'(x)=\frac{G(x)}{(1-x)^2}>0$，故 $F(x)=\frac{\ln x}{1-x}$ 在 $(0,1)$ 单调递增成立，原命题成立. ……………………………………………… (8分)

【方法三】(比值代换)由对称性，不妨设 $0<a<b$，$t=\frac{b}{a}>1$，

则 $f(a)=f(b)\Leftrightarrow a\ln a=ta\ln(ta)\Leftrightarrow\ln a=\frac{t\ln t}{1-t}$

由于 $b=ta$，欲证 $a+b<1$，即证：$(1+t)a<1\Leftrightarrow\ln(1+t)+\ln a<0$，即证：$\ln(1+t)+\frac{t\ln t}{1-t}<0$.

【方法四】(切、割线放缩)1、由于 $0<a<\frac{1}{e}$，故 $a(1+\ln a)<0$，即 $a\ln a<-a$；

2、由方法二知 $\frac{1}{x}+\ln x-1>0,0<x<1$，故 $\frac{1}{b}+\ln b-1>0$，即 $\ln b>1-\frac{1}{b}$，故 $b\ln b>b-1$，$\frac{1}{e}<b<1$；

由1、2知 $b-1<b\ln b=a\ln a<-a$，故 $a+b<1$ 成立，原命题成立.

(Ⅲ)由(Ⅱ)知 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab<(a+b)^2<1$. ……………………………………… (9分)

(1)当 $\frac{1}{e}\leqslant\cos\alpha<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，故 $f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$. … (10分)

(2)当 $0<\cos\alpha<\frac{1}{e}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha<1$ 时，由 $a^2+b^2<1$，取 $0<a=\cos\alpha<\frac{1}{e}$，得

$f(a)=f(b)\left(0<a=\cos\alpha<\frac{1}{e}<b<1\right)$ 时，有 $a^2+b^2<1\Leftrightarrow b^2<1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$，即 $\frac{1}{e}<b<\sin\alpha<1$.

由 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，故 $f(\cos\alpha)=f(a)=f(b)<f(\sin\alpha)$，

综上，得，当 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$ 成立. ……………………………… (12分)