

2023年呼和浩特市高三年级第二次质量数据监测

理科数学

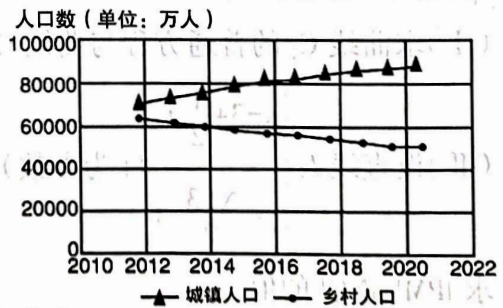
注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、座位号涂写在答题卡上.本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟.
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.写在本试卷上无效.
3. 答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 考试结束,将本试卷和答题卡一并交回.

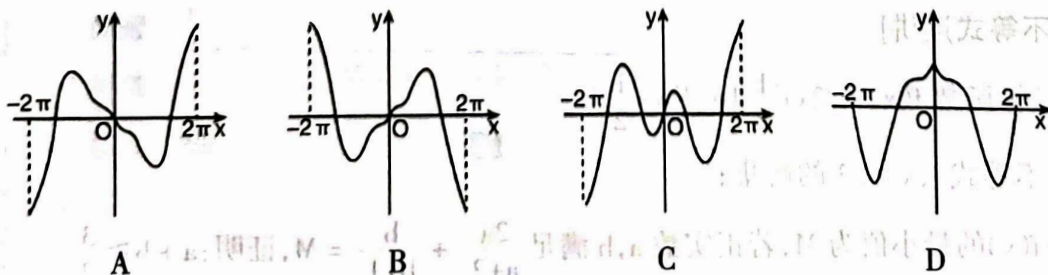
第 I 卷

一、单项选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的)

1. 已知全集 $U=\{x|-3 < x < 3\}$, 集合 $A=\{x|x^2+x-2 < 0\}$, 则 $C_U A=$
 - A. $(-2, 1]$
 - B. $(-3, -2] \cup [1, 3)$
 - C. $[-2, 1)$
 - D. $(-3, -1) \cup (1, 3)$
2. 已知复数 z 满足 $(2+i)z=2-4i$, 则 z 的虚部为
 - A. $-2i$
 - B. $2i$
 - C. -2
 - D. 2
3. 右图是近十年来全国城镇人口、乡村人口的折线图(数据来自国家统计局).
根据折线图,下列说法错误的是
 - A. 城镇人口与年份呈现正相关
 - B. 乡村人口与年份的相关系数 r 接近 1
 - C. 城镇人口逐年增长率大致相同
 - D. 可预测乡村人口仍呈现下降趋势



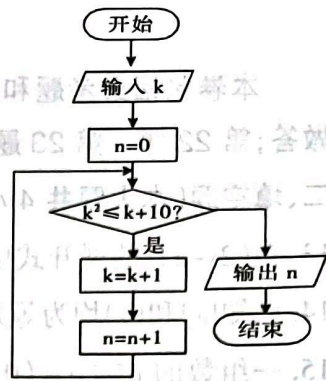
4. 函数 $f(x) = \frac{5\sin x}{e^{|x|}} + x\cos x$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象大致为



5. 执行如图所示的程序框图,若输入 k 的值为 1,则输出 n 的值

- A. 3
C. 5

- B. 2
D. 4



6. 若双曲线 $C_1: y^2 - 3x^2 = \lambda$ ($\lambda \neq 0$) 的右焦点与抛物线 $C_2: y^2 = 8x$ 的焦点重合,则实数 $\lambda =$

- A. ± 3

- B. $-\sqrt{3}$

- C. 3

- D. -3

7. 意大利数学家斐波那契(1170-1250),以兔子繁殖为例,引入“兔子数列”:即、1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、……,在实际生活中,很多花朵(如梅花,飞燕草,万寿筒等)的瓣数恰是斐波那契数列中的数,斐波那契数列在物理及化学等领域也有着广泛得应用.

已知斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 若 $a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\dots+a_{2023}=a_k$, 则 $k=$

- A. 2025

- B. 2026

- C. 2028

- D. 2024

8. 已知向量 $\vec{a}=(1,2), \vec{b}=(1,1)$, 若 $\vec{c}=3\vec{a}+k\vec{b}$, 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 则实数 $k=$

- A. 3

- B. -5

- C. 5

- D. -3

9. 已知角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且点 $(\cos^2 \alpha, \cos 2\alpha)$ 在直线 $y=-x$ 上, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})=$

- A. $-3-2\sqrt{2}$

- B. -1

- C. $3-2\sqrt{2}$

- D. $3+2\sqrt{2}$

10. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $\angle APB = \frac{2\pi}{3}, PA=PB=\sqrt{3}, AC=5, BC=4$, 且平面 $PAB \perp$ 平面

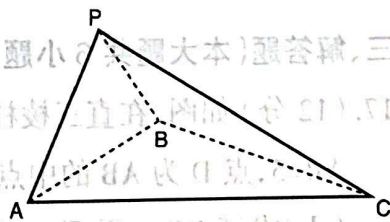
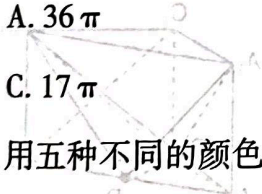
ABC , 则该三棱锥的外接球的表面积为_____.

- A. 36π

- B. 12π

- C. 17π

- D. 28π



11. 用五种不同的颜色给三棱柱的六个顶点涂色, 要求每个点涂一种颜色, 且每条棱的两个端点涂不同颜色, 则不同的涂色方法有

- A. 1920 种

- B. 1800 种

- C. 1200 种

- D. 840 种

12. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{x+1}}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) - 1 + m = 0$ 恰有 3 个不同的实数解, 则

实数 m 的取值范围是

- A. $(1 - \frac{1}{e^2}, 1)$

- B. $(1 - \frac{1}{e^2}, +\infty)$

- C. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

- D. $(1, e^2)$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分,第 13 题~21 题为必考题,每个试题考生都必须做答;第 22 题~第 23 题为选考题,考生根据要求做答.

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把正确答案填在答题卡的相应位置.)

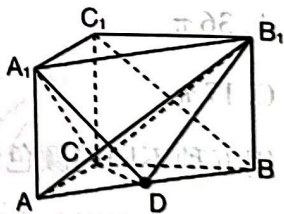
13. 在 $(2x-a)^6$ 的展开式中, x^3 的系数为 -20 , 则 $a=$ _____.
14. 已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列, $a_1=1, b_1=2, a_{10}+b_{10}=39$, 则数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前 60 项的和为 _____.
15. 一组数的 $p\%$ ($p \in (0, 100)$) 分位数指的是满足下列条件的一个数值: 至少有 $p\%$ 的数据不大于该值, 且至少有 $(100-p)\%$ 的数据不小于该值. 直观来说, 一组数的 $p\%$ 分位数指的是, 将这组数按照从小到大的顺序排列后, 处于 $p\%$ 位置的数. 例如: 中位数就是一个 50% 分位数. 2023 年 3 月, 呼和浩特市为创建文明城市, 随机从某小区抽取 10 位居民调查他们对自己目前生活状态的满意程度, 该指标数越接近 10 表示满意程度越高. 他们的满意度指标数分别是 8, 4, 5, 6, 9, 8, 9, 7, 10, 10, 则这组数据的 25% 分位数是 _____.
16. 2021 年 3 月 30 日, 小米正式开始启用具备“超椭圆”数学之美的新 logo(如图所示), 设计师的灵感来源于曲线 $C: |\frac{x}{a}|^n + |\frac{y}{b}|^n = 1$ ($n > 0, n \in \mathbb{R}$). 当 $n=4, a=2, b=1$ 时, 下列关于曲线的判断正确的有 _____.



- ① 曲线 C 关于 x 轴和 y 轴对称
- ② 曲线 C 所围成的封闭图形的面积小于 8
- ③ 曲线 C 上的点到原点 O 的距离的最大值为 $17^{\frac{1}{4}}$
- ④ 设 $M(\sqrt{3}, 0)$, 直线 $x-y+\sqrt{3}=0$ 交曲线 C 于 P, Q 两点, 则 $\triangle PQM$ 的周长小于 8

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC=3, BC=AA_1=4, AB=5$, 点 D 为 AB 的中点.



- (I) 求证 $BC_1 \perp$ 平面 ACB_1 ;
- (II) 求二面角 A_1-CD-B_1 的余弦值.

18. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1, 且 $b \sin B + c \sin C = (\frac{2\sqrt{3}}{3} b \sin C + a) \sin A$.

- (I) 求角 A ;
- (II) 若 $AC = \sqrt{2}$, AD 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线, 求 AD 的长度.

19. (12分)文化月活动中,某班级在宣传栏贴出标语“学好数学好”,可以不同断句产生不同意思,“学/好数学/好”指要学好的数学,“学好/数学/好”强调数学学习的重要性,假设一段时间后,随机有 N 个字脱落.

(I)若 $N=3$,用随机变量 X 表示脱落的字中“学”的个数,求随机变量 X 的分布列及期望;

(II)若 $N=2$,假设某同学捡起后随机贴回,求标语恢复原样的概率.

20. (12分)已知函数 $f(x) = e^x \sin x + \sqrt{2} a \cos(x + \frac{\pi}{4})$, $x \in [0, \pi]$.

(I)若 $a \leq 1$,判断函数 $f(x)$ 的单调性;

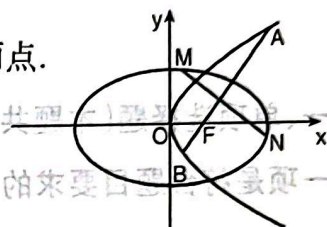
(II)当 $a=1$ 时,求函数 $f(x)$ 的最小值,并证明: $e^x(\pi - x) \geq \sin x - \cos x - 1$.

21. (12分)已知抛物线 $T: y^2 = 2px (p > 0)$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$,过抛物线 T 的焦点 F 的直线

l 交抛物线于 A, B 两点,线段 AB 的中垂线交椭圆 C 于 M, N 两点.

(I)若 F 恰是椭圆 C 的焦点,求 p 的值;

(II)若 $p \in \mathbb{N}_+$,且 MN 恰好被 AB 平分,求 $\triangle OAB$ 的面积.



请考生在第 22、23 题中任选一题做答,如果多做,则按所做的第一题记分.做答时,用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑.

[选修 4-4 坐标系与参数方程]

22. (10分)在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 2\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数).以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta - 6 \cos \theta = 0$.

(I)求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程;

(II)设直线 $l: \begin{cases} x = 3 + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)与曲线 C_2, C_1 的交点从上到下依次为 P, M, N, Q , 求 $|PM| + |NQ|$ 的值.

[选修 4-5 不等式选讲]

23. (10分)已知函数 $f(x) = |2x + \frac{1}{2}| + |2x - \frac{1}{2}|$.

(I)求不等式 $f(x) < 3$ 的解集;

(II)设 $f(x)$ 的最小值为 M ,若正实数 a, b 满足 $\frac{2a}{a+2} + \frac{b}{b+1} = M$,证明: $a + b \geq \frac{3}{2}$.