太原市 2023 年高三年级模拟考试（二）
数学试题参考答案及评分标准

一、选择题： B　C　A　D　B　A　D　B

二、选择题： 9.A D　10.A B　11.B C　12.A C D

三、填空题： 13. $1+i$　14. 0　15. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　16. $\sqrt{2}$

四、解答题： 17.解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，$\{b_n\}$ 的公差为 d，

由题意可得 $\begin{cases}1+q^2=2+4d,\\ q+2=1+2d,\end{cases}$ 解得 $q=3$ 或 $q=-1$（舍去），$d=2$，

$\therefore a_n=3^{n-1}(n\in N^*)$，$b_n=2n-1(n\in N^*)$；　………5 分

（2）由（1）得 $a_n=3^{n-1}(n\in N^*)$，$b_n=2n-1(n\in N^*)$，

选择条件①：$c_n=a_nb_n(n\in N^*)$，则 $c_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}(n\in N^*)$，

$\therefore S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n=1\times1+3\times3+5\times3^2+\cdots+(2n-3)\times3^{n-2}+(2n-1)\times3^{n-1}$，①

$\therefore 3S_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\times3^n$，②

①−②得 $-2S_n=1+2\times(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\times3^n$，

$\therefore S_n=(n-1)\times3^n+1(n\in N^*)$.　………10 分

选择条件②：$c_n=\dfrac{b_n}{a_n}(n\in N^*)$，则 $c_n=\dfrac{2n-1}{3^{n-1}}(n\in N^*)$，

$\therefore S_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}+c_n=1+\dfrac{3}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^{n-2}}+\dfrac{2n-1}{3^{n-1}}$，①

$\therefore \dfrac{1}{3}S_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{3^n}$，②

①−②得 $\dfrac{2}{3}S_n=1+2\times(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}})-\dfrac{2n-1}{3^n}$，

$\therefore S_n=3-\dfrac{n+1}{3^{n-1}}(n\in N^*)$.　………10 分

18.解：（1）$\because \cos C-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B=\dfrac{a^2-c^2}{2ab}$，$\therefore 2ab\cos C+c^2-a^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin B$，

由余弦定理 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$ 可得 $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\sin B$，

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 可得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\because 0<A<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore A=60°$；　………6 分

（2）由（1）得 $A=60°$，$\therefore \angle DAB=\angle DAC=30°$，

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}|AD|(b\sin\angle BAD+c\sin\angle CAD)$，

$\because |AD|=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore 2bc=3(b+c)\geq 6\sqrt{bc}$，$\therefore bc\geq 9$（当且仅当 $b=c=3$ 时等号成立），…9 分

$\because a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geq bc\geq 9$，$\therefore a\geq 3$，

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\geq 2\sqrt{3}$，$\therefore R\geq\sqrt{3}$，

当且仅当 $a=b=c=3$ 时，$\triangle ABC$ 外接圆的面积取最小值 $\pi R^2=3\pi$. ………12 分

19 解：（1）由题意得这四款车性能评分的平均数为 $(1\times7+2\times9+3\times16+4\times13+5\times5)\times\dfrac{1}{50}=3$；

其第 90 百分位数为 $\dfrac{4+5}{2}=4.5$； ………4 分

（2）由题意得

<table>
<tr><td rowspan="2">汽车性能</td><td colspan="2">汽车款式</td><td rowspan="2">合计</td></tr>
<tr><td>基础版</td><td>豪华版</td></tr>
<tr><td>一般</td><td>20</td><td>12</td><td>32</td></tr>
<tr><td>优秀</td><td>5</td><td>13</td><td>18</td></tr>
<tr><td>合计</td><td>25</td><td>25</td><td>50</td></tr>
</table>

零假设为 H_0：汽车性能与款式无关，

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\dfrac{50\times(20\times13-12\times5)^2}{32\times18\times25\times25}=\dfrac{50}{9}\approx5.556>3.841=x_{0.05}$，

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为汽车性能与款式有关，此推断犯错误的概率不超过 0.05；

汽车性能一般中基础版和豪华版的频率分别为 $\dfrac{5}{8}$ 和 $\dfrac{3}{8}$，性能优秀中基础版和豪华版的频率分别为 $\dfrac{5}{18}$ 和 $\dfrac{13}{18}$，根据频率稳定于概率的原理，可以认为性能优秀时豪华版的概率大. …9 分

（3）由题意可得 X 服从超几何分布，且 $N=12$，$M=4$，$n=3$，

X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{C_4^kC_8^{3-k}}{C_{12}^3}$，$k=0,1,2,3$，$E(X)=3\times\dfrac{4}{12}=1$. ………12 分

20 解：（1）取 BC 的中点 F，连接 DF,C_1F，记 $B_1C\cap C_1F=G$，

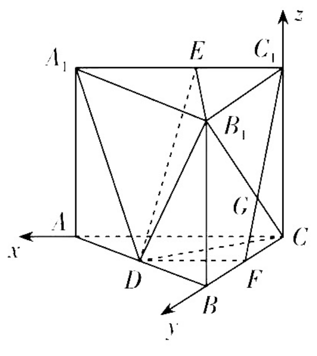
$\because D$ 是 AB 的中点，$\therefore DF\,//\,AC$，$\because B_1C\perp AC$，$\therefore B_1C\perp DF$，

在矩形 BB_1C_1C 中，$\because \tan\angle FC_1C=\dfrac{CF}{CC_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle BCB_1=\dfrac{BB_1}{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \angle FC_1C=\angle BCB_1$，

$\therefore \angle CFC_1+\angle BCB_1=\angle CFC_1+\angle FC_1C=90^\circ$，$\therefore \angle CGF=90^\circ$，$\therefore B_1C\perp C_1F$，

$\because C_1F\cap DF=F$，$\therefore B_1C\perp$ 平面 A_1DFC_1，$\therefore B_1C\perp A_1D$； ………6 分

（2）由 $AC\perp$ 平面 BB_1C_1C 得 $AC\perp BC$，$AC\perp CC_1$，由矩形 BB_1C_1C 得 $BC\perp CC_1$，以点 C 为原点，CA，CB，CC_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $BC=2$，$\overrightarrow{C_1E}=\lambda\overrightarrow{C_1A_1}(0\leq\lambda\leq1)$，则 $C(0,0,0)$，$D(1,1,0)$，$B_1(0,2,\sqrt{2})$，$E(2\lambda,0,\sqrt{2})$，

设 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 B_1CD 的一个法向量，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{CD},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{CB_1},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x_1 + y_1 = 0, \\ 2y_1 + \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $z_1 = \sqrt{2}$，则 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -1, \end{cases}$，$\therefore \vec{m} = (1, -1, \sqrt{2})$， ………8 分

设 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ 是平面 B_1DE 的一个法向量，则 $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{B_1D}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{B_1E}, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x_2 - y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \\ 2\lambda x_2 - 2y_2 = 0, \end{cases}$ 令 $z_2 = \sqrt{2}$，则 $x_2 = \dfrac{2}{1-\lambda}$， $y_2 = \dfrac{2\lambda}{1-\lambda}$， $\therefore \vec{n} = (\dfrac{2}{1-\lambda}, \dfrac{2\lambda}{1-\lambda}, \sqrt{2})$，

$\therefore |\cos < \vec{m}, \vec{n} > | = |\dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}| = \dfrac{\sqrt{2}(2-\lambda)}{\sqrt{3\lambda^2 - 4\lambda + 12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $\therefore \lambda = \dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda = 3$（舍去），

$\therefore \dfrac{C_1E}{C_1A_1} = \dfrac{1}{3}$. ………12 分

21.解：（1）由题意得 $\dfrac{16}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1$， $\therefore 16b^2 - 9a^2 = a^2b^2$，

不妨设直线 l_1 的方程为 $y = \dfrac{b}{a}x$，则直线 l_1' 的方程为 $y - 3 = \dfrac{b}{a}(x-4)$， $\therefore M(4 - \dfrac{3a}{b}, 0)$，

同理可得 $N(0, 3 + \dfrac{4b}{a})$， $\therefore |OM| \cdot |ON| = |(4 - \dfrac{3a}{b})(3 + \dfrac{4b}{a})| = |\dfrac{16b^2 - 9a^2}{ab}| = ab = 2\sqrt{3}$，

由 $\begin{cases} 16b^2 - 9a^2 = a^2b^2, \\ ab = 2\sqrt{3} \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3, \end{cases}$ $\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$； ………4 分

（2）由（1）得 $A_1(-2, 0)$， $A_2(2, 0)$， $F(\sqrt{7}, 0)$，

设 $P(x_1, y_1)$， $Q(x_2, y_2)$，直线 PQ 的方程为 $x = my + \sqrt{7}(m \neq \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

由 $\begin{cases} x = mx + \sqrt{7}, \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(3m^2 - 4)y^2 + 6\sqrt{7}my + 9 = 0$， $\therefore y_1 + y_2 = \dfrac{-6\sqrt{7}m}{3m^2 - 4}$， $y_1y_2 = \dfrac{9}{3m^2 - 4}$， ……6 分

直线 A_1P 的方程为 $y = \dfrac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$，直线 A_2Q 的方程为 $y = \dfrac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$， ……8 分

联立直线 A_1P 与 A_2Q 的方程，可得点 G 的横坐标为

$$x = \frac{2(x_1+2)y_2 + 2(x_2-2)y_1}{(x_1+2)y_2 - (x_2-2)y_1} = \frac{2[(x_1y_2 + x_2y_1) + 2(y_2 - y_1)]}{x_1y_2 - x_2y_1 + 2(y_1 + y_2)},$$

$\because x_1y_2 - x_2y_1 + 2(y_2 + y_1) = (my_1 + \sqrt{7})y_2 - (my_2 + \sqrt{7})y_1 + 2(y_1 + y_2)$

$= \sqrt{7}(y_2 - y_1) + 2(y_1 + y_2) = (2 + \sqrt{7})(y_2 + y_1) - 2\sqrt{7}y_1 = -2\sqrt{7}[\dfrac{(6 + 3\sqrt{7})m}{3m^2 - 4} + y_1]$，

$x_1y_2 + x_2y_1 + 2(y_2 - y_1) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2(y_1 + y_2) - 4y_1$

$= (my_1 + \sqrt{7})y_2 + (my_2 + \sqrt{7})y_1 + 2(y_1 + y_2) - 4y_1 = 2my_1y_2 - (2 + \sqrt{7})(y_1 + y_2) - 4y_1$

$= -4[\dfrac{(6 + 3\sqrt{7})m}{3m^2 - 4} + y_1]$， $\therefore x = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$；

$\therefore$ 点 G 在定直线 $x = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$ 上. ………12 分

22.解：（1）由题意得 $f'(x)=(mx+m-1)e^{x}$，$\therefore f'(1)=(2m-1)e$，$f(1)=(m-1)e+n$，

$\therefore f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，即 $y=(2m-1)ex+n-me$，

$\therefore\begin{cases}2m-1=1,\\ n-me=2-e,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}m=1,\\ n=2,\end{cases}$ $\therefore f(x)=(x-1)e^{x}+2$，

$\therefore f'(x)=xe^{x}$，$x\in\mathrm{R}$，令 $f'(x)<0$，则 $x<0$；令 $f'(x)>0$，则 $x>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单减，且 $1\le f(x)<2$；在 $(0,+\infty)$ 上单增，且 $f(x)>1$，

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$；　　　　　　　　　　　　　　　　………4 分

（2）①由题意得 $g'(x)=\dfrac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}$，$x\neq-1$，令 $g'(x)<0$，则 $x<-1$ 或 $-1<x<0$；令 $g'(x)>0$，则 $x>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,0)$ 上单减，在 $(0,+\infty)$ 上单增，

当 $x<-1$ 时，$g(x)$ 的值域为 $(-\infty,0)$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)$ 的值域为 $(1,+\infty)$；

当 $x>0$ 时，$g(x)$ 的值域为 $(1,+\infty)$，$\therefore -1<c<0<d$，

令 $G(x)=g(x)-g(-x)$，$-1<x<0$，则 $G'(x)=g'(x)+g'(-x)=\dfrac{x}{e^{x}(x+1)^{2}}[e^{2x}-(\dfrac{1+x}{1-x})^{2}]$，

令 $T(x)=(1-x)e^{x}-(1+x)$，$-1<x<0$，则 $T'(x)=-xe^{x}-1$，$T''(x)=-(x+1)e^{x}<0$，

$\therefore T'(x)<T'(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$，$\therefore T(x)>T(0)=0$，$\therefore (1-x)e^{x}>(1+x)$，$\therefore e^{x}>\dfrac{1+x}{1-x}>0$，

$\therefore G'(x)<0$，$\therefore G(x)>G(0)=0$，$\therefore g(x)>g(-x)$，$\therefore g(d)=g(c)>g(-c)$，

$\therefore d>-c$，$\therefore c+d>0$；　　　　　　　　　　　　　　　　　　………8 分

②由（1）得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单减，且 $1\le f(x)<2$；在 $(0,+\infty)$ 上单增，且 $f(x)\in(1,+\infty)$，

设 $f(a)=f(b)=m$，则 $a<0<b<1$，且 $1<m<2$，

$\because f(x)=2-\dfrac{1}{g(-x)}$，$\therefore f(-c)=2-\dfrac{1}{g(c)}=2-\dfrac{1}{m}<m=f(b)$，

$\therefore -c<b$，$\therefore b+c>0$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　………12 分

注：以上各题其它解法请酌情赋分.