参考答案

一、单选题：共 12 道小题，每题 5 分，共 60 分

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	C	B	B	C	B	C	C	B

二、填空题：共 4 道小题，每题 5 分，共 20 分.

13.$\exists x_0>0$， $\tan x_0 \le x_0$

14.$x+y=0$

15.80.5

16.$\left[\frac{5}{4},2\right)$

三、解答题：共 5 道大题，共 70 分.

17.

解:(1)由题设知 $f'(x)=x^2-\frac{f'(-1)}{2}x+2$,取 $x=-1$，则有 $f'(-1)=3+\frac{f'(-1)}{2}$,即 $f'(-1)=6$:

也即 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-f(1)$，取 $x=1$，则有 $f(1)=\frac{5}{6}-f(1)$，即 $f(1)=\frac{5}{12}$

故 $f'(-1)=6$, $f(1)=\frac{5}{12}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{12}$, $f'(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,

x	0	(0,1)	1	(1,2)	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	单增	极大值 $\frac{5}{12}$	单减	$\frac{1}{4}$

故 $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{5}{12}$, $f(x)_{\min}=f(0)=-\frac{5}{12}$

18.

解:(1)从 2018—2022 年中国信创产业规模中任取 2 个数据有(8.1,9.6),（8.1,11.5),（8.1,13.8),（8.1,16.7),（9.6,11.5)，（9.6,13.8），(9.6,16.7)，（11.5,13.8)，（11.5,16.7)，（13.8,16.7)，共 10 种情况，其中这 2 个数据都大于 10 的有(11.5,13.8)，（11.5,16.7)，(13.8,16.7)，共 3 种情况，所以 2 个数据都大于 10 的概率 $P=\frac{3}{10}$

(2) $y=a\cdot b^x$ 两边同时取自然对数

得 $\ln y=\ln\left(a\cdot b^x\right)=\ln a+x\ln b$，则 $v=lna+xlnb$.

因为 $\bar{x}=3,\bar{v}=2.45,\sum_{i=1}^{5}x_i^2=55$,

所以$\ln b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iv_i-5x\overline{v}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5x^{-2}}=\dfrac{38.52-5\times3\times2.45}{55-5\times3^2}=0.177$

$lna=\bar{v}-\bar{x}\cdot lnb=2.45-0.177\times3=1.919$，所以$\bar{v}=1.919+0.177x$

即$\ln y=1.919+0.177x$，所以$\hat{y}=e^{1.919+0.177x}=6.81\times1.19^x$，

即 y 关于 x 的回归方程为$\hat{y}=6.81\times1.19^x$.

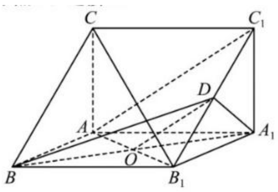
2023 年的年份代码为 6，把 x=6 代入$\hat{y}=6.81\times1.19^x$，

得$\bar{y}=6.81\times1.19^6=6.81\times2.84\approx19.34<20$，

所以预测 2023 年中国信创产业规模不会超过 20 千亿元.

19.公众号：高中试卷君

解：(1）连接AB_1与 A、B 交于点 O，连接 OD



$\because ABC-A_1B_1C_1$为三棱柱，$\therefore ABB_1A_1$为平行四边形，点 O 为AB_1的中点

又 D 为B_1C_1的中点，则$AC_1//OD$,

又 OD$\subset$平面A_1BD,$AC_1\not\subset$平面A_1BD,$\therefore AC_1//$平面A_1BD.

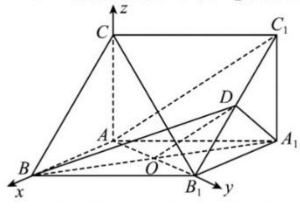
(2)$\because CA\perp AB$，$CA\perp AA_1$,AB$\cap AA_1=A$，$\therefore CA\perp$平面ABB_1A_1

$\because AB_1\subset$面ABB_1A_1，$\therefore CA\perp AB_1$

$\therefore AB_1=\sqrt{CB_1^2-AC^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$

$\because$AB=2，$AB_1=2,BB_1=2\sqrt{2}$，$\therefore AB^2+AB_1^2=BB_1^2$，即$AB\perp AB_1$

以 A 为坐标原点，AB，AB_1，AC 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，



A(0,0,0)，$A_1(-2,2,0)$,B(2,0,0),$B_1(0,2,0)$,$C_1(-2,2,2)$,D(-1,2,1)

$\therefore \overrightarrow{AA_1}=(-2,2,0)$, $\overrightarrow{A_1D}=(1,0,1)$

$\because AB\perp AB_1$, $AB\perp AC$, $AB_1\cap AC=A$

$\therefore AB\perp$ 平面 AB_1C ，则平面 AB_1C 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$

设平面 AA_1D 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$ ，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$ ，即 $\begin{cases}-2x+2y=0\\ x+z=0\end{cases}$

令 x=1,y=1,z=-1, ∴ $\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)$,

设平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成二面角的大小为 θ

$$\therefore \cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|1\times1+0\times1+0\times(-1)|}{1\times\sqrt{1+1+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$ 平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成二面角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

20.

解：(1)设 F(-c,0)，由 $2\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}$ 知 2(-c）=-2+0，即 c=1，

由 $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PT}|$ 知 $(-2-0)^2+(\sqrt{3}-b)^2=[-2-(-1)]^2+(\sqrt{3}-0)^2$ ，即 $b=\sqrt{3}$,

则 a=2，故椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2)直线 BT 的方程为 $x=-\dfrac{t}{\sqrt{3}}(y-\sqrt{3})$,与 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 联立，可得

$\left(t^2+4\right)y^2-2\sqrt{3}t^2y+3t^2-12=0$ ，且 $\vartriangle>0$ ，有 $y_D\cdot\sqrt{3}=\dfrac{3t^2-12}{t^2+4}$ ，即 $y_D=\sqrt{3}\dfrac{t^2-4}{t^2+4}$;

直线 PT 的方程为 $x+2=-\dfrac{t+2}{\sqrt{3}}(y-\sqrt{3})$,令 x=0，可得 $y_Q=\dfrac{\sqrt{3}t}{t+2}$

由 $\dfrac{S_{\vartriangle DTQ}}{S_{\vartriangle PTB}}=\dfrac{QT\cdot DT\cdot\sin\angle DTQ}{PT\cdot BT\cdot\sin\angle BTP}=\dfrac{QT\cdot DT}{PT\cdot BT}=\dfrac{y_Q\cdot\left(-y_D\right)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$, $S_{\vartriangle DTQ}=-S_{\vartriangle PTB}\dfrac{y_Qy_D}{3}$

即 $S_{\vartriangle DTQ}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2t-t^2}{t^2+4}$ ， $t\in(0,2)$

而 $\dfrac{2t-t^2}{t^2+4}\le2\dfrac{1}{4\sqrt{2}-4}-1$ ，当 $t+2=2\sqrt{2}$ ，即 $t=2\sqrt{2}-2$ 时取等,且 $t\in\left(0,2\right)$

故 $\vartriangle DTQ$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2}$

21.

解：(1)由 $f(x)=e^x-ax$ 知 $f^{'}(x)=e^x-a$，

1）当 $a\le e$ 时，且有 $x\in[1,+\infty)$， $f^{'}(x)\ge 0$， $f(x)$ 单增，故无极值；

2）当 $a>e$ 时，有 $x\in(1,\ln a)$， $f^{'}(x)<0$， $f(x)$ 单减，而 $x\in(\ln a,+\infty)$， $f^{'}(x)>0$， $f(x)$ 单增，故 $f(x)_{极小值}=f(\ln a)=a-a\ln a$， $f(x)$ 无极大值.

综上，当 $a\le e$ 时， $f(x)$ 无极值；

当 $a>e$ 时， $f(x)$ 极小值为 $a-\ln a$， $f(x)$ 无极大值.

（2）由（1）可知当 $a>e$ 时， $f(\ln a)=a(1-\ln a)<0$， $f(0)=1>0$，且 $x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$，

由零点存在定理可知 $0<x_1<\ln a<x_2$，而题设可知 $e^{x_1}-ax_1=e^{x_2}-ax_2=0$，消去 a 可得

$\dfrac{e^{x_2}}{e^{x_1}}=e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$，令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，且 $\ln t=x_2-x_1$，即 $x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1},x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$， 将其代入 $\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}>1$，整理可

令得 $F(t)=\ln t-\dfrac{(\lambda+1)(t-1)}{\lambda t+1}>0$

而 $F^{'}(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(\lambda+1)^2}{(\lambda t+1)^2}=\dfrac{\left(\lambda^2t-1\right)(t-1)}{t(\lambda t+1)^2}$,

1)当 $\lambda\ge 1$ 时，且 $t\in(1,+\infty)$，有 $F^{'}(t)\ge\dfrac{(t-1)^2}{t(\lambda t+1)^2}>0$， $F\left(t\right)$ 单增，F(t)>F(1)=0，满足题设；

2)当 0<λ<1 时，且 $t\in\left(1,\dfrac{1}{\lambda^2}\right)$，有 $F^{'}(t)<0$， $F\left(t\right)$ 单减，F(t)<f(l)=0，不满足题设；

综上，λ 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

22.解：(1)由 $\rho=2\sin\theta+2a\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\sin\theta+2a\rho\cos\theta$，

故曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=2y+2ax$，即 $(x-a)^2+(y-1)^2=a^2+1$；

由 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，得 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=2$

故直线 l 的直角坐标方程为 $y=x+2$.

（2）点 P 的直角坐标为（-2,0），在直线 l 上，而直线 l 的标准参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，

将其代入$x^2+y^2=2y+2ax$，整理可得$t^2-(3\sqrt{2}+\sqrt{2}a)t+4a+4=0$.

由题设知$\Delta=2(3+a)^2-4(4a+4)=2(a-1)^2>0$，解得$a\neq 1$

又$t_1+t_2=3\sqrt{2}+\sqrt{2}a$，$t_1t_2=4a+4$

当 a>-1,且 a≠1 时，有$t_1,t_2>0$，则$|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=\sqrt{2}(a+3)=5\sqrt{2}$，

解得 a=2;

当$a\leq -1$时，有$t_1t_2\leq 0$，则$|PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{2}|a-1|=5\sqrt{2}$，解

得 a=-4.

故 a 的值为 2 或-4..