2022-2023 学年下学期高一六月月考

数学试题

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.若 $A=\{x\mid x\geq 4\}$，$B=\left\{x\mid 2^x>8\right\}$，则 $\left(\complement_{\mathrm{R}}A\right)\cap B=$（　）

A．$(3,4)$　　B．$[3,4]$　　C．$(3,+\infty)$　　D．$[4,+\infty)$

【答案】A

2.已知一直线经过点 A（2，3，2），B（－1，0，5），下列向量中是该直线方向向量的为（）

A．$\vec{a}=(1,1,1)$ B．$\vec{a}=(1,-1,1)$ C．$\vec{a}=(-3,3,3)$ D．$\vec{a}=(1,1,-1)$

【答案】D

3.直线 l 的一个方向向量为 $(2,1,1)$，平面 α 的一个法向量为 $(4,2,2)$，则（）

A．$l//\alpha$　　B．$l\perp\alpha$

C．$l//\alpha$ 或 $l\subset\alpha$　　D．l 与 α 的位置关系不能判断

【答案】B

4.使"$a>b$"成立的充要条件是（　）

A．$a>b+1$　　B．$\dfrac{a}{b}>1$

C．$a^2>b^2$　　D．$a^3>b^3$

【答案】D

5.已知圆锥的顶点为 A，过母线 AB、AC 的截面面积是 $2\sqrt{3}$.若 AB、AC 的夹角是 60°，且母线 AC 的长是高的 2 倍，则该圆锥的体积是（　　）

A.$\left(4\sqrt{3}+6\right)\pi$　　B.$2\sqrt{2}\pi$　　C.$4\sqrt{2}\pi$　　D.$12\sqrt{2}\pi$

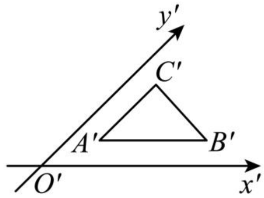
【答案】B

6.已知函数 $f(x)=ax^5+b\sin x+c$，若 $f(-1)+f(1)=2$，则 $c=$（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．$\dfrac{2}{3}$

【答案】C

7.如图，$\triangle A'B'C'$ 是水平放置 $\triangle ABC$ 的直观图，其中 $B'C'=C'A'=1$，$A'B'//x'$ 轴，$A'C'//y'$ 轴，则 $BC=$（　）



A． $\sqrt{2}$　　　　B． 2　　　　C． $\sqrt{6}$　　　　D． 4

【答案】C

8.设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有顶点都在一个表面积是 40π 的球面上，且 $AB=AC=AA_1, \angle BAC=120^{\circ}$，则此直三棱柱的表面积是（　　）

A.$16+8\sqrt{3}$　　B.$8+12\sqrt{3}$　　C.$8+16\sqrt{3}$　　D.$16+12\sqrt{3}$

【答案】D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9． 下列选项中哪些是正确的（　）

A． $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$　　　　B． $y=\sin x-\cos x, x\in \mathrm{R}$ 的最大值为 1

C． $\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$　　　　D． 复数 $z=m-1+\left(m^2-1\right)\mathrm{i}, m\in \mathrm{R}$ 可能为纯虚数

【答案】AC

10.在三棱锥 $A-BCD$ 中，G,E 分别是 $\triangle BCD, \triangle ACD$ 的重心.则下列命题中正确的有（　　）

A.直线 BG,AE 共面　　　　B.直线 AG,BE 相交

C.$V_{A-GBC}=\frac{1}{2}V_{A-DBC}$　　　　D. $AB=3GE$

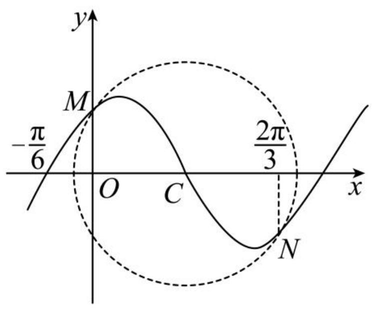
【答案】ABD

11.在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 $a,b,c,a=3,b=7$，且 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\cos C$ 的值可以是（　　）

A.$\frac{1}{7}$　　　　B.$-\frac{11}{14}$　　　　C.$-\frac{1}{7}$　　　　D.$\frac{11}{14}$

【答案】CD

12． 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi),(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图像如图中实线所示，图中圆 C 与 $f(x)$ 的图像交于 M， N 两点，且 M 在 y 轴上，则下列说法正确的是（　　）



A． 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π

B． 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

C． 函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

D．若圆C的半径为$\frac{5\pi}{12}$，则函数$f(x)$的解析式为$f(x)=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

【答案】AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.已知$\tan\alpha=2$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$____________________;

【答案】－3

14.已知平面α的法向量$\vec{n}=(-1,2,0)$，且点$A\in\alpha$，$\overrightarrow{AP}=(12,1,-4)$，则点$P$到平面$\alpha$的距离为____________________;

【答案】$2\sqrt{5}$.

15.设点O是$\triangle ABC$外接圆的圆心，$AC=1,\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-2$，则$\frac{\sin C}{\sin B}$的值是__________.

【答案】$\sqrt{5}$

16. 依次连接棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$六个面的中心，得到的多面体的体积是__________.

【答案】$\frac{4}{3}$

四、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知复数$z_1=1+3\mathrm{i}$，$z_2=2+2\mathrm{i}$，i为虚数单位.

(1)求$|z_1-z_2|$；(2)若$z=\frac{z_1}{z_2}$，求z的共轭复数.

【解】(1) $\because z_1=1+3\mathrm{i}$，$z_2=2+2\mathrm{i}$，

$z_1-z_2=(1+3\mathrm{i})-(2+2\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，$|z_1-z_2|=\sqrt{2}$　　5 分

(2) 由$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\frac{(1+3\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}=\frac{2-2\mathrm{i}+6\mathrm{i}-6\mathrm{i}^2}{4-4\mathrm{i}^2}=\frac{8+4\mathrm{i}}{4+4}=1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，

所以$\bar{z}=1-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.　　10 分

18.（12 分）已知$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(2,1)$.

(1)当k为何值时，$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{b}$垂直？

(2)若$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+m\vec{b}$且A、$B$、$C$三点共线，求$m$的值.

【解】(1) $\because\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(2,1)$，$\therefore k\vec{a}-\vec{b}=(k-2,-1)$，

又 $k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，得 $2(k-2)-1=0$，即 $k=\dfrac{5}{2}$；　　6 分

（2）$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{b}=(8,3)$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+m\vec{b}=(1+2m,m)$，$\because A$、$B$、$C$ 三点共线，$\therefore \overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BC}$，

则 $8m-3(1+2m)=0$，解得：$m=\dfrac{3}{2}$.　　12 分

19.（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 所对的边，且满足 $a^2+b^2-c^2=ab$.

(1)求角 C 的大小；

(2)设向量 $\vec{a}=\left(3\sin A,\dfrac{3}{2}\right)$，向量 $\vec{b}=(1,-2\cos C)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【解】(1）解：因为 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$；　　6 分

（2）解：因为 $\vec{a}=\left(3\sin A,\dfrac{3}{2}\right)$，$\vec{b}=(1,-2\cos C)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

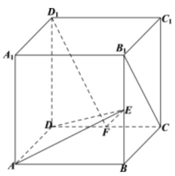
所以 $3\sin A-\dfrac{3}{2}\times 2\cos C=0$，所以 $\sin A=\cos C=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $A=\dfrac{5\pi}{6}$（舍），

当 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$B=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.　　12 分

20.（12 分）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别是 BB_1，CD 的中点，

（1）求证：$D_1F\perp$ 平面 ADE；

（2）求向量 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CB_1}$ 的夹角.

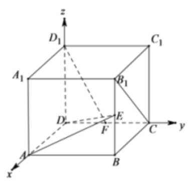


【解】以 D 为原点，建立空间直角坐标系，如图所示：

（1）不妨设正方体的棱长为 1，

则 D（0，0，0），A（1，0，0），D_1（0，0，1），E（1，1，$\dfrac{1}{2}$），F（0，$\dfrac{1}{2}$，0），

则 $\overrightarrow{D_1F}=$（0，$\dfrac{1}{2}$，-1），$\overrightarrow{DA}=$（1，0，0），$\overrightarrow{AE}=$（0，1，$\dfrac{1}{2}$），



则 $\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{DA}=0$，$\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，

$\therefore \overrightarrow{D_1F}\perp\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{D_1F}\perp\overrightarrow{AE}$. $\therefore D_1F\perp$ 平面 ADE.　　6 分

（2）B_1（1，1，1），C（0，1，0），故 $\overrightarrow{CB_1}=$（1，0，1），$\overrightarrow{EF}=$（-1，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$），

$\therefore \overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB_1}=-1+0-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$，$\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$，$\left|\overrightarrow{CB_1}\right|=\sqrt{2}$，

$\cos\left\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CB_1}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CB_1}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB_1}\right|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\left\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CB_1}\right\rangle=150^\circ$．　　　　12 分

21．（12 分）已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}(\omega>0)$的最小正周期是$\pi$，将函数$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变；再将所得函数图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$g(x)$的图象．

(1)求$g(x)$的解析式；

(2)在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$g\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\frac{4}{5}$，$b=2$，$\triangle ABC$的面积为3，求边长$a$的值．

【解】(1) 由题意可得：

$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\because f(x)$的最小正周期为π，且$\omega>0$，$\therefore\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，$\therefore\omega=1$．$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$．

将函数$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长为原来的2倍，纵坐标不变，

得到函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再将所得函数图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，

得到函数$y=\sin x$的图象，故$g(x)=\sin x$；　　　　6 分

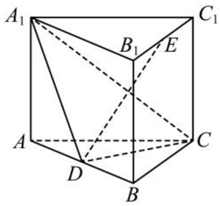
（2）由(1)知$g(x)=\sin x$，$\therefore g\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos A=\frac{4}{5}$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$．

$\because\triangle ABC$的面积为3，$\therefore\frac{1}{2}bc\sin A=3$，又$\because b=2$，得$c=5$．

由$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{4}{5}=13$．得$a=\sqrt{13}$．　　　　12 分

22．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$平面 ABC，D，E 分别为棱 AB，B_1C_1 的中点，$BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$A_1C_1=4$.

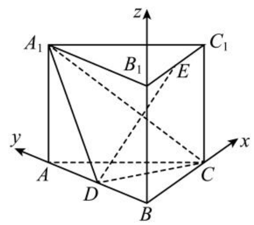


(1)证明：$DE//$平面 ACC_1A_1；

(2)若三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，求二面角 $D-A_1C-A$ 的正弦值.

【解】（1）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$平面 ABC，$BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$A_1C_1=4$.

所以 $AC=A_1C_1=4$，则 $AC^2=AB^2+BC^2$，则 $AB\perp BC$，则如下图，以 B 为原点，BC，BA，BB_1 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，



设 $BB_1=h$，则 $A\left(0,2\sqrt{3},0\right),B\left(0,0,0\right),C\left(2,0,0\right)$,

$A_1\left(0,2\sqrt{3},h\right),B_1\left(0,0,h\right),C_1\left(2,0,h\right),D\left(0,\sqrt{3},0\right)E\left(1,0,h\right)$,

所以 $\overrightarrow{DE}=\left(1,-\sqrt{3},h\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(2,-2\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{AA_1}=\left(0,0,h\right)$，

设平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=2x-2\sqrt{3}y=0\\\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}=hz=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $x=\sqrt{3},z=0$，即 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}=\left(1,-\sqrt{3},h\right)\cdot\left(\sqrt{3},1,0\right)=\sqrt{3}-\sqrt{3}+0=0$，得 $\overrightarrow{DE}\perp\vec{n}$，

又 $DE\not\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $DE//$平面 ACC_1A_1； 6 分

（2）三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积 $V_{A-A_1DC}=V_{A_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot A_1A=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\times h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

解得 $h=4$，则 $A_1\left(0,2\sqrt{3},4\right)$，由（1）知平面 AA_1C 的法向量为 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，

设平面 DA_1C 的一个法向量为 $\vec{m}=\left(a,b,c\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(2,-\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{DA_1}=\left(0,\sqrt{3},4\right)$，

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=2a-\sqrt{3}b=0\\\overrightarrow{DA_1}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}b+4c=0\end{cases}$，令 $b=4$，则 $a=2\sqrt{3},c=-\sqrt{3}$，即 $\vec{m}=\left(2\sqrt{3},4,-\sqrt{3}\right)$，

则 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{6+4+0}{2\times\sqrt{31}}=\frac{5\sqrt{31}}{31}$，

由图可知二面角 $D-A_1C-A$ 为锐角，所以二面角 $D-A_1C-A$ 的余弦值为 $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.

于是 $\sin\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\sqrt{1-cos^2\langle\vec{n},\vec{m}\rangle}=\frac{\sqrt{186}}{31}$，故二面角 $D-A_1C-A$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{186}}{31}$. 12 分