

德阳市高中 2020 级第一次诊断考试

数学试卷(理工农医类)

说明:

1. 本试卷分第 I 卷和第 II 卷,共 4 页.考生作答时,须将答案答在答题卡上,在本试卷、草稿纸上答题无效.考试结束后,将答题卡交回.
2. 本试卷满分 150 分,120 分钟完卷.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 9\}$, $Q = \{1, 3\}$, 则 $P \cap Q =$
 - A. Q
 - B. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 3\}$
 - C. P
 - D. $\{-3, -2, -1, 2\}$
2. 关于统计数据的分析,有以下几个结论,其中正确的是
 - A. 样本数据 9, 3, 5, 7, 12, 13, 1, 8, 10, 18 的中位数是 8 或 9
 - B. 将一组数据中的每个数据都减去同一个数后,平均数与方差均没有变化
 - C. 利用残差进行回归分析时,若残差点比较均匀地落在宽度较窄的水平带状区域内,则说明线性回归模型的拟合精度较高
 - D. 调查影院中观众观后感时,从 15 排(每排人数相同)每排任意抽取一人进行调查是系统抽样法
3. 复数 $\frac{5}{i-2}$ 的共轭复数为
 - A. $2+i$
 - B. $-2+i$
 - C. $-2-i$
 - D. $2-i$
4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 5, S_{10} = 30$, 则 $S_{15} =$
 - A. 90
 - B. 125
 - C. 155
 - D. 180
5. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y+1 \geq 0 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x+2}$ 的最小值为
 - A. 1
 - B. $\frac{1}{7}$
 - C. $-\frac{1}{3}$
 - D. $-\frac{1}{5}$
6. 已知 $\vec{OA} = \mathbf{a}, \vec{OB} = \mathbf{b}$, 点 M 关于 A 的对称点为 S , 点 S 关于 B 的对称点为 N , 那么 $\vec{MN} =$
 - A. $2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$
 - B. $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$
 - C. $-2\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$
 - D. $-2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

7. 德阳市文庙广场设置了一些石凳供游人休息,这些石凳是由正方体形石料(如图 1)截去 8 个一样的四面体得到的(如图 2),则下列对石凳的两条边 AB 与 CD 所在直线的描述中正确的是

- ① 直线 AB 与 CD 是异面直线
- ② 直线 AB 与 CD 是相交直线

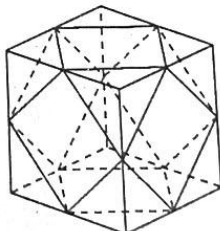


图1

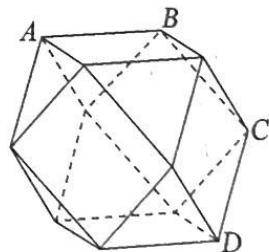


图2

数学一诊(理工农医类) 第 1 页(共 4 页)

③ 直线 AB 与 CD 成 60° 角

④ 直线 AB 与 CD 垂直

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

8. 已知某曲线方程为 $\frac{x^2}{m+3} - \frac{y^2}{2m-1} = 1$, 则下列描述中不正确的是

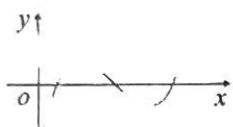
A. 若该曲线为双曲线, 且焦点在 x 轴上, 则 $m \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

B. 若该曲线为圆, 则 $m = 4$

C. 若该曲线为椭圆, 则其焦点可以在 x 轴上, 也可以在 y 轴上

D. 若该曲线为双曲线, 且焦点在 y 轴上, 则 $m \in (-\infty, -3)$

9. 函数 $f(x) = [\ln(\pi - x) + \ln x] \cos x$ 的大致图象为



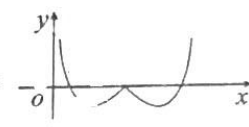
A



B



C



D

10. 如图是游湖边上常见的设施, 从两个高为 1 米的悬柱上放置一根均匀铁链, 让其自然下垂轻触地面 (视为相切) 形成的曲线称为悬链线 (又称最速降线). 建立恰当的直角坐标系后, 其方程

可以是 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} + t)$, 那么两悬柱间的距离大致为 (可能

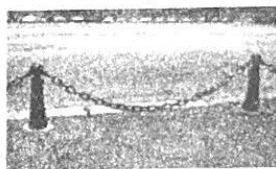
会用到的数据 $e^{1.25} \approx 3.49, e^{1.35} \approx 3.86$)

A. 2.5 米

B. 2.6 米

C. 2.8 米

D. 2.9 米



11. 已知函数 $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2023}}{2023}$, $x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的零点个数

为

A. 0

B. 1

C. 2

D. 2023

12. 已知 a, b, c 是正实数, 且 $e^{2a} - 2e^{a+b} + e^{b+c} = 0$, 则 a, b, c 的大小关系不可能为

A. $a = b = c$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $b > a > c$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

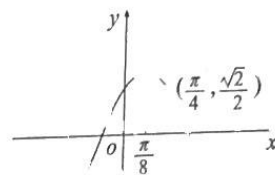
本卷包括必考题和选考题两部分, 第 13 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填在答题卡上.

13. 已知二项式 $(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的展开式中最后三项的二项式系数和为 79, 则 n

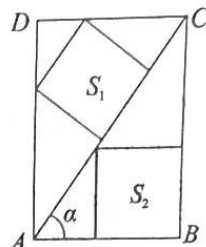
= _____.

14. 已知 a, b 是单位向量, 且 $a \cdot b = 0$, 若 $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$, 那么当 $c \perp (a - b)$ 时, $\lambda =$ _____.



15. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 $f(x) =$ _____.

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, AC 是对角线, 设 $\angle BAC = \alpha$, 已知正方形 S_1 和正方形 S_2 分别内接于 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle ABC$, 则 $\frac{\text{正方形 } S_1 \text{ 的周长}}{\text{正方形 } S_2 \text{ 的周长}}$ 的取值范围为 _____.



三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差 $d \neq 0$, 前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{S_n}{n}$ 为常数.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = 2^{n-1} \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 边 a, b, c 对应角分别为 A, B, C , 且 $\frac{b}{a} = \frac{\cos B + 1}{\sqrt{3} \sin A}$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 中任选一个作为已知条件, 使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一, 求 AC 边上的高.

条件 ①: $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{3}, b = 1$;

条件 ②: $b = 2, c = 2\sqrt{3}$;

条件 ③: $a = 3, c = 2$.

注: 若选多个条件分别作答, 则按第一个解答给分.

19. (本题满分 12 分)

买盲盒是当下年轻人的潮流之一, 每个系列的盲盒分成若干个盒子, 每个盒子里面随机装有一个动漫、影视作品的图片, 或者设计师单独设计出来的玩偶, 消费者不能提前得知具体产品款式, 具有随机属性, 某礼品店 2022 年 1 月到 8 月售出的盲盒数量及利润情况的相关数据如下表所示:

月份 / 月	1	2	3	4	5	6	7	8
月销售量 / 百个	4	5	6	7	8	10	11	13
月利润 / 千元	4.1	4.6	4.9	5.7	6.7	8.0	8.4	9.6

(1) 求出月利润 y (千元) 关于月销售量 x (百个) 的回归方程 (精确到 0.01);

数学一诊 (理工农医类) 第 3 页 (共 4 页)

(2)2022年“一诊”考试结束后,某班数学老师购买了装有“五年高考三年模拟”和“教材全解”玩偶的两款盲盒各4个,从中随机选出3个作为礼物赠送给同学,用 ξ 表示3个中装有“五年高考三年模拟”玩偶的盲盒个数,求 ξ 的分布列和数学期望.

参考公式:回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

参考数据: $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 580, \sum_{i=1}^8 x_i y_i = 459.5$.

20. (本题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(a-1)x^2 - ax (a > 0)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值;
- (2) 当 $a > 1$ 时,记 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 的最大值为 M , 最小值为 m . 已知 $M + m \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. 设 $f(x)$ 的三个零点为 x_1, x_2, x_3 , 求 $f(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$ 的取值范围.

21. (本题满分12分)

已知函数 $f(x) = e^x, g(x) = t \sin x + 1$, 设 $h(x) = f(x) - g(x)$.

- (1) 若 $h(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 求实数 t 的取值范围;
- (2) 求证: $\exists t \in (0, +\infty)$, 对 $\forall x \in \mathbf{R}, \exists a \in [0, +\infty)$, 使得 $xh(x) = a$ 总成立.

请考生在22、23二题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目. 如果多做, 则按所做第一个题目计分, 作答时, 请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本题满分10分)

在平面直角坐标系中, 曲线 C_1 的方程为 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 直线 l 过原点 O 且与曲线 C_1 交于 A, B 两点, 点 P 在曲线 C_2 上且

$OP \perp AB$. 以 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 写出曲线 C_1 的极坐标方程并证明 $|OA| \cdot |OB|$ 为常数;
- (2) 若直线 l 平分曲线 C_1 , 求 $\triangle PAB$ 的面积.

23. (本题满分10分)

已知函数 $f(x) = |x|$.

- (1) 画出 $y = f(x-1) - f(x+5)$ 的图象, 并根据图象写出不等式 $f(x-1) - f(x+5) \leq -4$ 的解集;
- (2) 若 $f(x-1) - f(x+5) + kf(x+2) \geq 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

数学一诊(理工农医类) 第4页(共4页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线