2024 届全国高考分科调研模拟测试卷
数学参考答案

1. B　因为复数 z 对应点的坐标为 $(2,2)$，所以 $z=2+2\mathrm{i}$，所以 $\frac{2-\mathrm{i}}{z}=\frac{2-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}{(2+2\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})}=\frac{2-6\mathrm{i}}{8}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\mathrm{i}$. 故选 B.

2. A　因为集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{y|y=x+1,x\in A\}$，所以 $B=\{1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$. 故选 A.

3. B　根据计数原理可以将事情分成两类：化学老师安排在 1 班和化学老师不安排在 1 班. ①化学老师排在 1 班，先排 1 班，有 1 种方法，其余 5 个班的老师做全排列共有 $A_5^5=120$ 种方法；②化学老师不在 1 班，先排 1 班，有 4 种方法，再排 6 班有 4 种方法，余下 4 个班有 $A_4^4=24$ 种方法，所以共有：$4\times4\times24=384$ 种方法，所以总的排列数为 504. 故选 B.

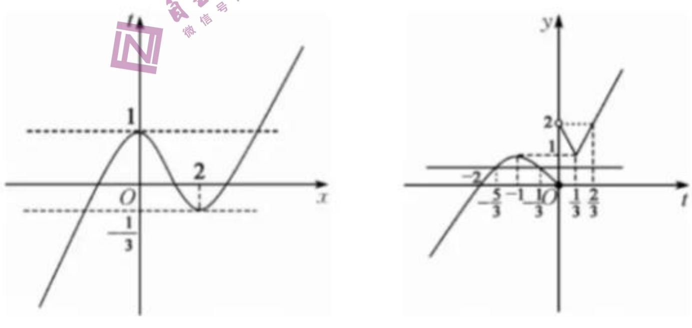
4. B　因为 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\left(\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+\frac{\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\omega=4k(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\omega=2k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，又因为 $0<\omega<1$，所以 $\omega=\frac{2}{3}$. 故选 B.

5. C　因为 $a>b>0$ 且 $a+b=4$，所以 $a>2$ 且 $b+(a-2)=2$，所以 $\frac{4}{a-2}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{a-2}+\frac{1}{b}\right)[b+(a-2)]=\frac{1}{2}\left(5+\frac{4b}{a-2}+\frac{a-2}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{4b}{a-2}\cdot\frac{a-2}{b}}\right)=\frac{9}{2}$，当且仅当 $\frac{4b}{a-2}=\frac{a-2}{b}$，即 $a=\frac{10}{3}$ 且 $b=\frac{2}{3}$ 时取等号，故 $\frac{4}{a-2}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$. 故选 C.

6. D　函数 $f(x)$ 是偶函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f'(x)=2x+\sin x$，若 $x\in[0,\pi]$，$f'(x)\geqslant0$；若 $x\in(\pi,+\infty)$，$f'(x)>2\pi+\sin x>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$0<0.4^{0.5}<1$，$\log_4 5-\log_3 5=\frac{\lg 5}{\lg 4}-\frac{\lg 5}{\lg 3}=\frac{\lg 5}{\lg 3\cdot\lg 4}(\lg 3-\lg 4)<0$，所以 $1<\log_4 5<\log_3 5$，所以 $0.4^{0.5}<\log_4 5<\log_3 5$，所以 $f(0.4^{0.5})<f(\log_4 5)<f(\log_3 5)=f\left(\log_3\frac{1}{5}\right)$，即 $b<a<c$. 故选 D.

7. C　记"三人中至少有两人解答正确"为事件 A，"小陆同学解答不正确"为事件 B，则 $P(A)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$，$P(AB)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$，$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{5}$. 故选 C.

8. D　令 $f(x)=t$，作出 $t=f(x)$，$y=g(t)$ 图象如下：



由图知，若 $y=g(f(x))-a$ 恰有 6 个零点，则 $g(t)=a$ 的两根均在 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ 内，所以 $1<a<2$. 故选 D.

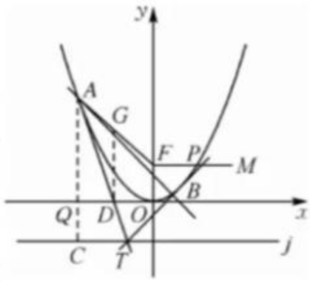
9. AB　对于 A，如果 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，所以 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，又 $n\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，命题正确；对于 B，如果 $m\subset\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，直线 m 与平面 β 无公共点，那么 $m/\!/\beta$，命题正确；对于 C，如果 $\alpha\cap\beta=l$，$m/\!/\alpha$，m 与 l 可平行也可异面，命题错误；对于 D，如果 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，α 与 β 可能平行，也可能相交，命题错误. 故选 AB.

10. ABC　由 $f(x+1)=f(x-3)$，得 $f(x+4)=f(x)$，故 A 正确；由 $f(1+x)=f(3-x)$，得 $f(2+x)=f(2-x)$，故 B 正确；根据 AB 选项作出 $f(x)$ 在 $[0,8]$ 上的图象，可知 C 正确，D 错误. 故选 ABC.

11. AC　将函数 $y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=$

$\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$的图象,故 $\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\omega x+\frac{\pi}{12}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则 $\omega=-\frac{1}{2}+12k(k\in\mathbf{Z})$,故当 $k=1$ 时,$\omega=\frac{23}{2}$;$k=2$ 时,$\omega=\frac{47}{2}$. 故选 AC.

12. BCD　由题设知:$|PF|=1+\frac{p}{2}=2$,解得 $p=2$,∴抛物线方程为 $x^2=4y$,故选项 A 错误;连接 FM 交抛物线于点 P,此时 $|PM|+|PF|$ 的值最小为 4,故选项 B 正确;如右图所示,设 G 为 AF 的中点,过点 A 作 $AC\perp$抛物线的准线 l' 于点 C,交 x 轴于点 Q,过点 G 作 $GD\perp x$ 轴于点 D.∴$|DG|=\frac{1}{2}(|OF|+|AQ|)=\frac{1}{2}|AC|=\frac{1}{2}|AF|$,故以 AF 为直径的圆与 x 轴相切,故选项 C 正确;设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $x^2=4y$ 即 $y=\frac{1}{4}x^2$ 得 $y'=\frac{1}{2}x$,则切线 AT 的方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$,即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$,同理可得切线 BT 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$,由



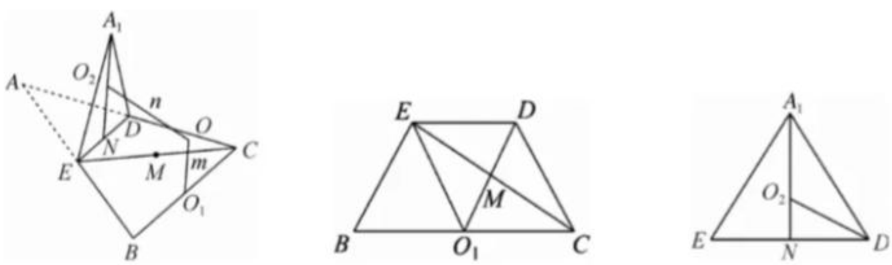
$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2,\\ y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2},\\ y=\frac{1}{4}x_1x_2,\end{cases}$ 由题意知 T 在准线 $y=-1$ 上,∴$\frac{1}{4}x_1x_2=-1$,$x_1x_2=-4$,∴$y_1+y_2=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{4}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]=\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2+2$,∴当 $x_1+x_2=0$ 时,$y_1+y_2=2$ 为最小值,故选项 D 正确. 故选 BCD.

13. $\sqrt{26}$　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $2(k-3)-3(k+2)=0$,解得 $k=-12$,则 $\boldsymbol{a}=(-15,3)$,$\boldsymbol{b}=(-10,2)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-5,1)$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{26}$.

14. 3 或 $-\frac{9}{2}$　依题意,当焦点在 x 轴上时,$2\sqrt{2m+3}=6$,解得 $m=3$;当焦点在 y 轴上时,$2\sqrt{-2m}=6$,解得 $m=-\frac{9}{2}$. 综上,$m=3$ 或 $m=-\frac{9}{2}$.

15. $a_n=2n-\frac{7}{2}$　∵$d\in\mathbf{N}^*$,$a_1<-1$,$a_2>0$,$a_3<3$,∴$d=2$. ∵在区间$\left(\frac{1}{2},\frac{17}{2}\right)$中的项比$\left[\frac{37}{2},\frac{53}{2}\right]$中的项少 2 个,且$\{a_n\}$为等差数列,$\frac{17}{2}-\frac{1}{2}=\frac{53}{2}-\frac{37}{2}$,∴$\frac{1}{2},\frac{17}{2},\frac{37}{2},\frac{53}{2}$是数列的项,所以 $a_2=\frac{1}{2}$,所以 $a_n=\frac{1}{2}+(n-2)\times 2=2n-\frac{7}{2}$.

16. $2\sqrt{3}$　要使三棱锥 A_1-CED 的体积最大,只需高最大,即面 $A_1ED\perp$面 CED. 设外接球的球心为 O,四边形 $BCDE$ 的外接圆的圆心为 O_1,则球心在过 O_1 且垂直于面 $BCDE$ 的直线 m 上. 取 DE 的中点为 N,连结 A_1N,则 $A_1N\perp DE$,所以 $A_1N\perp$面 CED,所以 $A_1N/\!/m$. $\triangle A_1DE$ 为边长为 2 的正三角形,过$\triangle A_1DE$ 的外心 O_2 作直线 $n\perp$面 A_1ED. 则 m,n 的交点即为球心 O. 在底面四边形 $BCDE$ 中,如图所示:



易知 O_1 为 BC 边的中点,$O_1M=\frac{1}{2}O_1D=1$,则 $NO_2=\frac{1}{3}A_1N=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}A_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $O_1O=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 所以外接球半径 $R=\sqrt{O_1B^2+O_1O^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{3}$. 由球的性质可知:当 OM 垂直于截面时,截面圆的直径最小,设其半径为 r. 此时 $OM=\sqrt{O_1M^2+O_1O^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $r=\sqrt{R^2-OM^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{39}}{3}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{3}$. 所以该截面圆的最小直径为 $2r=2\sqrt{3}$.

17. 解：(1)由表中数据，得

$\bar{x}=\dfrac{9.7+10.1+9.8+10.2+9.7+9.9+10.2+10.2+10.0+10.2}{10}=10(\text{cm})$，…………………… 2 分

$s^2=\dfrac{0.09+0.01+0.04+0.04+0.09+0.01+0.04+0.04+0+0.04}{10}=0.04(\text{cm}^2)$．…………………… 5 分

(2)由(1)可知 $s=0.2$，故 $\bar{x}-3s=10-0.6=9.4$，$\bar{x}+3s=10+0.6=10.6$．…………………… 8 分

因为表中第 9 个数据 $10.7\notin(9.4,10.6)$，故这周需对当周的培养过程进行检查．…………………… 10 分

18. 解：(1)因为 $S_n=2a_n-1$，所以 $S_{n+1}=2a_{n+1}-1$，

两式相减，可得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$，整理得 $a_{n+1}=2a_n$，…………………… 2 分

因为在 $S_n=2a_n-1$ 中当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$，…………………… 4 分

所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $a_n=2^{n-1}$．…………………… 6 分

(2)易知 $c_1=a_1=1$，$c_3=S_2=3$，所以公差 $d=\dfrac{3-1}{2}=1$，…………………… 7 分

所以 $c_n=n$，所以 $b_n=a_n\cdot c_n=n\cdot 2^{n-1}$，…………………… 8 分

因为 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，

则 $2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，…………………… 10 分

两式相减可得 $T_n=n\cdot2^n-(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})=n\cdot2^n-\dfrac{1-2^n}{1-2}=(n-1)\cdot2^n+1$，

即 $T_n=(n-1)\cdot2^n+1$．…………………… 12 分

19. 解：若选择条件①：

在△ABC 中，$a\cos\dfrac{B}{2}=b\sin A$，由正弦定理得 $\sin A\cdot\cos\dfrac{B}{2}=\sin B\cdot\sin A$，…………………… 2 分

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\cos\dfrac{B}{2}=\sin B$，…………………… 4 分

所以 $\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$，因为 $\cos\dfrac{B}{2}\neq0$，所以 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，…………………… 7 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$．又 $A=\dfrac{\pi}{3}$，则△ABC 为等边三角形．…………………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．…………………… 12 分

若选择条件②：

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $a\sin B=b\sin A$．…………………… 2 分

又因为 $a\cos B=b\sin A$，所以 $\sin B=\cos B$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$．…………………… 4 分

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}$，…………………… 6 分

$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，…………………… 9 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$．…………………… 12 分

若选择条件③：

由 $\tan\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)=2+\sqrt{3}$ 得 $\dfrac{\tan B+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan B\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan B+1}{1-\tan B}=2+\sqrt{3}$，…………………… 3 分

解得 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$， ………………………………………………………………………………… 5 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$， ……………………………………………………………………… 7 分

又 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，所以△ABC 是直角三角形， ………………………………………… 9 分

所以 $a=\sqrt{6}$， ……………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$. ……………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：因为 $CD\perp$ 面 PAD，$PD\subset$ 面 PAD，

所以 $CD\perp PD$， ……………………………………………………………………………………… 1 分

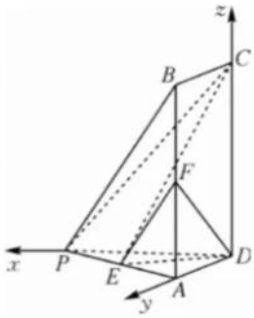
又 $PD\perp FD$，CD，$FD\subset$ 面 CFD，$CD\cap FD=D$，

所以 $PD\perp$ 平面 CFD， ……………………………………………………………………………… 2 分

即 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp AD$. ……………………………………………………………… 3 分

又 $CD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DP}$、$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$ 方向分别为 x，y，z 轴正向建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$E(1,1,0)$，$F(0,2,1)$，$C(0,0,2)$， ……………………………………………… 4 分



所以 $\overrightarrow{DF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{EC}=(-1,-1,2)$，所以 $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EC}=0$，

所以 $DF\perp EC$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：$\overrightarrow{DE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,0,2)$，

设平面 DEF 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ 2y_1+z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=-1$，$z_1=-2$，则 $\boldsymbol{m}=(-1,1,-2)$. ……………………………………………… 8 分

设平面 DEC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_2+y_2=0,\\ z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=1$，则 $x_2=-1$，$\boldsymbol{n}=(-1,1,0)$， ……………………………………………………… 10 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-1\times(-1)+1\times1+(-2)\times0}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}\times\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又因为所求二面角为锐角，所以二面角 $F-ED-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=16-2|PF_1|\cdot|PF_2|$，

所以 $|PF_1|+|PF_2|=4$，根据椭圆的定义知 $2a=4$，即 $a=2$， ……………………………………… 2 分

因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，所以 $c=1$，$b=\sqrt{3}$，

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)根据圆方程为 $x^2+y^2=4$ 可知，AB 为圆的直径，点 M 在圆上，所以 $MA\perp MB$，

设直线 MA 的方程为 $y=k(x+2)$，$k\neq0$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

所以 $x_A\cdot x_E=-2x_E=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，所以 $x_E=\frac{-8k^2+6}{3+4k^2}$，代入直线得 $y_E=\frac{12k}{3+4k^2}$； …………… 6 分

同理设直线 MB 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$，联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{k}(x-2), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $\left(3+\frac{4}{k^2}\right)x^2-\frac{16}{k^2}x+\frac{16}{k^2}-12=0$，

则 $x_B\cdot x_F=2x_F=\dfrac{\frac{16}{k^2}-12}{3+\frac{4}{k^2}}=\dfrac{16-12k^2}{3k^2+4}$，所以 $x_F=\dfrac{8-6k^2}{4+3k^2}$，$y_F=\dfrac{12k}{4+3k^2}$，…………………………………………………… 8 分

所以 $k_{EF}=\dfrac{y_E-y_F}{x_E-x_F}=\dfrac{3k^2-3}{7k}$，直线 EF 的方程为 $y-\dfrac{12k}{3+4k^2}=\dfrac{3k^2-3}{7k}\left(x-\dfrac{-8k^2+6}{3+4k^2}\right)$，………………………… 9 分

令 $y=0$，得 $x_H=-\dfrac{12k}{3+4k^2}\cdot\dfrac{7k}{3k^2-3}+\dfrac{-8k^2+6}{3+4k^2}=\dfrac{-(3+4k^2)(6k^2+6)}{(3+4k^2)(3k^2-3)}=\dfrac{2k^2+2}{1-k^2}$，………………………………… 10 分

联立直线 MA，MB $\begin{cases} y=k(x+2), \\ y=-\frac{1}{k}(x-2) \end{cases}$ 得 $x_M=\dfrac{2-2k^2}{k^2+1}$，所以 $x_M\cdot x_H=\dfrac{2-2k^2}{k^2+1}\cdot\dfrac{2k^2+2}{1-k^2}=4$，

所以点 M 的横坐标与点 H 的横坐标之积为定值，定值为 4. ………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(x+1)$，

则 $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\times\ln(x+1)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\times\dfrac{1}{x+1}$，……………………………………………………………… 1 分

据此可得 $f(1)=0$，$f'(1)=-\ln 2$，

函数在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-0=-(x-1)\ln 2$，

即 $(\ln 2)x+y-\ln 2=0$. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

(2) 由函数的解析式可得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=(x+a)\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$，

函数的定义域满足 $\frac{1}{x}+1=\frac{x+1}{x}>0$，即函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$，

定义域关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，由题意可得 $b=-\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 3 分

由对称性可知 $f\left(-\frac{1}{2}+m\right)=f\left(-\frac{1}{2}-m\right)\left(m>\frac{1}{2}\right)$，

取 $m=\frac{3}{2}$ 可得 $f(1)=f(-2)$，

即 $(a+1)\ln 2=(a-2)\ln\frac{1}{2}$，则 $a+1=2-a$，解得 $a=\frac{1}{2}$，…………………………………………………… 4 分

经检验 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$ 满足题意，故 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$.

即存在 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$ 满足题意. ………………………………………………………………………………… 5 分

(3) 由函数的解析式可得 $f'(x)=\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\dfrac{1}{x+1}$，

由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，则 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点.

令 $\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\ln(x+1)+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\dfrac{1}{x+1}=0$，

则 $-(x+1)\ln(x+1)+(x+ax^2)=0$，

令 $g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)$，

$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在极值点，等价于 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点. …………………… 6 分

$g'(x)=2ax-\ln(x+1)$，$g''(x)=2a-\dfrac{1}{x+1}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时 $g(x)<g(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不合题意；…………………………………………………… 7 分

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$2a\geqslant1$ 时，由于 $\frac{1}{x+1}<1$，所以 $g''(x)>0$，$g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=0$，$g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无零点，不符合题意；…………………………………………………………………… 8 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $g''(x)=2a-\frac{1}{x+1}=0$ 可得 $x=\frac{1}{2a}-1$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2a}-1\right)$ 时，$g''(x)<0$，$g'(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(\frac{1}{2a}-1,+\infty\right)$ 时，$g''(x)>0$，$g'(x)$ 单调递增，

故 $g'(x)$ 的最小值为 $g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln 2a$，

令 $m(x)=1-x+\ln x(0<x<1)$，则 $m'(x)=\frac{-x+1}{x}>0$，

函数 $m(x)$ 在定义域内单调递增，$m(x)<m(1)=0$，

据此可得 $1-x+\ln x<0$ 恒成立，

则 $g'\left(\frac{1}{2a}-1\right)=1-2a+\ln 2a<0$. ……………………………………………………………………………… 9 分

令 $h(x)=\ln x-x^2+x(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{-2x^2+x+1}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

故 $h(x)\leqslant h(1)=0$，即 $\ln x\leqslant x^2-x$（取等条件为 $x=1$），

所以 $g'(x)=2ax-\ln(x+1)>2ax-[(x+1)^2-(x+1)]=2ax-(x^2+x)$，

$g'(2a-1)>2a(2a-1)-[(2a-1)^2+(2a-1)]=0$，且注意到 $g'(0)=0$，

根据零点存在性定理可知：$g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x_0)<g(0)=0$. ………………………………………………………………………………………………… 10 分

令 $n(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，则 $n'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}\leqslant0$，

则 $n(x)$ 单调递减，注意到 $n(1)=0$，

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$，从而有 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，

所以 $g(x)=ax^2+x-(x+1)\ln(x+1)>ax^2+x-(x+1)\times\frac{1}{2}\left[(x+1)-\frac{1}{x+1}\right]=\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{2}$，

令 $\left(a-\frac{1}{2}\right)x^2+\frac{1}{2}=0$ 得 $x_2=\sqrt{\frac{1}{1-2a}}$，所以 $g\left(\sqrt{\frac{1}{1-2a}}\right)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，符合题意. ………………………………………………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ……………………………………………………………………………… 12 分