2022–2023 学年度第一学期期末考试
高三数学试题

本试题卷共 6 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．复数 $\dfrac{i-2}{1+i}$ 的虚部为

A．$\dfrac{3}{2}i$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

2．若 $(a+x)^3+(a-x)^4$ 的展开式中含有 x^2 项的系数为 18，则 $a=$

A．2　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{3}{2}$ 或 -2　　D．$-\dfrac{3}{2}$ 或 -2

3．已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2x=0\},B=\{(x,y)\mid y=k(x+1)\}$．若 $A\cap B\neq\varnothing$，则

A．$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le k\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$-\sqrt{3}\le k\le\sqrt{3}$

C．$k\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k\le-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D．$k\ge\sqrt{3}$ 或 $k\le-\sqrt{3}$

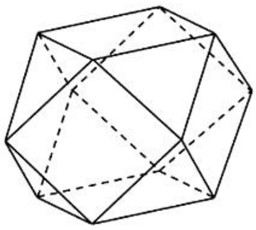
4．“阿基米德多面体”也称为半正多面体，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，它体现了数学的对称美．如图，将一个正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，则该多面体中具有公共顶点的两个正三角形所在平面的夹角正切值为

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

B．1

C．$\sqrt{2}$

D．$2\sqrt{2}$

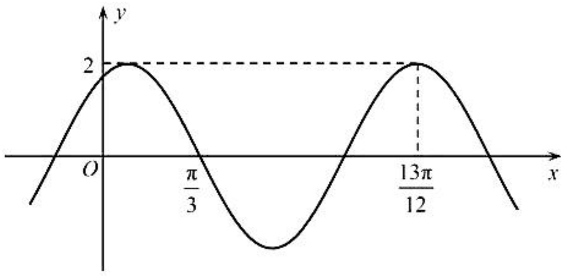


5．“$m=1$”是“函数 $f(x)=\dfrac{2^x+m}{2^x-m}$ 为奇函数”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如下图所示，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位后得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $y=g(x)+g(\dfrac{x}{2})$ 的最小值为



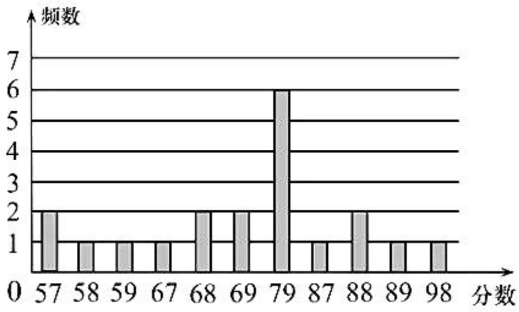
A．-4

B．$-\dfrac{9}{4}$

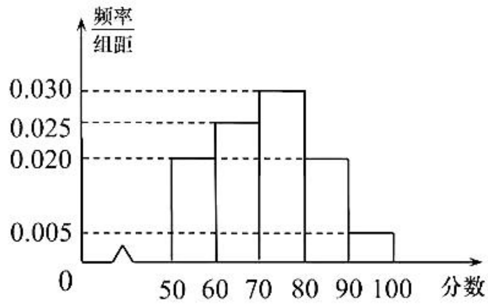
C．$-\dfrac{7}{4}$

D．0

7．为了解甲、乙两个班级学生的物理学习情况，从两个班学生的物理成绩（均为整数）中各随机抽查20个，得到如图所示的数据图（用频率分布直方图估计总体平均数时，每个区间的值均取该区间的中点值），关于甲、乙两个班级的物理成绩，下列结论正确的是



甲班物理成绩



乙班物理成绩

A．甲班众数小于乙班众数　　B．乙班成绩的75百分位数为79

C．甲班的中位数为74　　D．甲班平均数大于乙班平均数估计值

8．已知定义域为 $[0,1]$ 的“类康托尔函数” $f(x)$ 满足：① $\forall\ 0\le x_1<x_2\le 1$，$f(x_1)\le f(x_2)$；② $f(x)=2f(\dfrac{x}{3})$；③ $f(x)+f(1-x)=1$．则 $f(\dfrac{1}{2023})=$

A．$\dfrac{1}{32}$　　B．$\dfrac{1}{64}$　　C．$\dfrac{1}{128}$　　D．$\dfrac{1}{256}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．通过长期调查知，人类汗液中 A 指标的值 X 服从正态分布 $N(10,2.5^2)$．则

A．估计100人中汗液 A 指标的值超过10的人数约为50

B．估计100人中汗液 A 指标的值超过12.5的人数约为16

C．估计100人中汗液 A 指标的值不超过15的人数约为95

D．随机抽检5人中汗液 A 指标的值恰有2人超过10的概率为 $\dfrac{5}{16}$

参考数据：

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)=0.6827$；$P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=0.9545$．

10．已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB}=(x,y)$，把 $\overrightarrow{AB}$ 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量 $\overrightarrow{AP}=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$，叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 θ 角得到点 P．已知平面内点 $A(2,1)$，点 $B(2+t,1-t)$，$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}>0$，点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 角得到点 P，则

A．$|\overrightarrow{BP}|=2\sqrt{2}$

B．$\overrightarrow{AB}=(-2,2)$

C．B 的坐标为 $(4,-1)$

D．P 的坐标为 $(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$

11．已知 O 为坐标原点，离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 的椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，C 与曲线 $y=\cos x$ 恰有三个交点，则

A．椭圆 C 的长轴长为 $\sqrt{3}$

B．C 的内接正方形面积等于3

C．点 W 在 C 上，$WF_1\perp WF_2$，则 ΔWF_1F_2 的面积等于1

D．曲线 C 与曲线 $y=\sqrt{2}x-4\ln x+2\ln 2-1$ 没有交点

12．已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1,b_1=0,a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n-\dfrac{b_n}{2}+1,2b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n-\dfrac{a_n}{4}-1$．则

A．$a_2-2b_2=\dfrac{1}{2}$

B．数列 $\{a_n+2b_n\}$ 是等比数列

C．数列 $\{a_n-2b_n\}$ 是等差数列

D．$a_{n+1}>a_n$

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知 $\sin\alpha+\sin\beta=1$，$\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$________．

14．将 8 块完全相同的巧克力分配给 A,B,C,D 四人，每人至少分到 1 块且最多分到 3 块，则不同的分配方案共有__________种（用数字作答）．

15．已知 O 为坐标原点，抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A,B 两点，A,B 中点 D 在 x 轴上方且其横坐标为 1，$|AB|=3$，则直线 AB 的斜率为__________．

16．已知球 O 的半径为 2，圆锥 W 的顶点和底面圆周上的点均在球 O 上，记球心 O 到圆锥 W 底面的距离为 h，圆锥 W 的底面半径为 r．则（1）$h\cdot r$ 的最大值为_________；（2）圆锥 W 体积的最大值为__________．

（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

在 ΔABC 中，$\sin B\cdot\sin C\cdot\cos A+2\sin A\cdot\sin C\cdot\cos B=3\sin A\cdot\sin B\cdot\cos C$，内角 A,B,C 的对边分别记为 a,b,c．

（1）求 $\dfrac{a^2+2b^2}{c^2}$ 的值；

（2）求 $\cos C$ 的最小值．

18．（12分）

如图 1 所示，在 ΔABC 中，点 E,F 在线段 AB 上，点 D 在线段 BC 上，$AE=EF=FB=1$，$CE=2,DF=1$，$CE\perp AB$．将 ΔACE，ΔBDF 分别沿 CE,DF 折起至点 A,B 重合为点 G，形成如图 2 所示的几何体 W，在几何体 W 中作答下面的问题．

（1）证明：平面 $EFG\perp$ 平面 $CEFD$；

（2）求点 D 到平面 CFG 的距离．

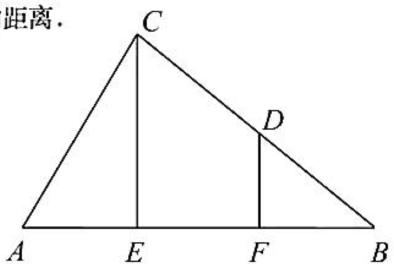


图 1

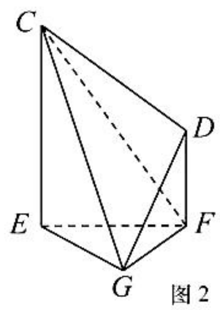


图 2

19.（12 分）

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，____________________．给出下列两个条件：条件①：数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{S_n+a_1\}$ 均为等比数列；条件②：$2^n a_1+2^{n-1}a_2+\cdots+2a_n=na_{n+1}$．

试在上面的两个条件中任选一个，补充在上面的横线上，完成下列两问的解答：

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记正项数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$b_1=a_2$，$b_2=a_3$，$4T_n=b_n\cdot b_{n+1}$，求 $\sum\limits_{i=1}^{2n}[(-1)^i b_i b_{i+1}]$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

20．（12 分）

由 mn 个小正方形构成长方形网格有 m 行和 n 列．每次将一个小球放到一个小正方形内，放满为止，记为一轮．每次放白球的概率为 p，放红球的概率为 q，$p+q=1$．

（1）若 $m=2$，$p=q=\frac{1}{2}$，记 y 表示100轮放球实验中“每一列至少一个红球”的轮数，统计数据如下：

n	1	2	3	4	5
y	76	56	42	30	26

求 y 关于 n 的回归方程 $\ln\hat{y}=\hat{b}n+\hat{a}$，并预测 $n=10$ 时，y 的值（精确到1）；

（2）若 $m=2$，$n=2$，$p=\frac{1}{3}$，$q=\frac{2}{3}$，记在每列都有白球的条件下，含红球的行数为随机变量 X，求 X 的分布列和数学期望；

（3）求事件“不是每一列都至少一个红球”发生的概率，并证明：$(1-p^m)^n+(1-q^n)^m\geq 1$．

附：经验回归方程系数：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k}x_iy_i-k\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2-k\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；$\sum\limits_{i=1}^{5}n_i\cdot\ln y_i=53,\overline{\ln y}=3.8$．

21．（12分）

已知O为坐标原点，动直线$l: y=kx+m(km\neq 0)$与双曲线$C: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的渐近线交于$A$，$B$两点，与椭圆$D:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$交于$E$，$F$两点．当$k^2=10$时，$2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=3(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})$．

（1）求双曲线C的方程；

（2）若动直线l与C相切，证明：ΔOAB的面积为定值．

22．（12分）

已知函数$f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{e}$的最小值和$g(x)=\ln(1+x)-ax$的最大值相等．

（1）求a；

（2）证明：$\ln x>e^{-x}-\dfrac{2}{ex}$；

（3）已知m是正整数，证明：$[1+\dfrac{1}{2m(m+1)}]^{m+1}>e^{\frac{1}{2m+2}}$．