2023 年 10 月份过程性检测

数学试题

2023.10

本试卷共 4 页，分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

注意事项：

1. 答题前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将姓名、座号、准考证号、班级和科类填写在答题卡和答题纸规定的位置上.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.
3. 第Ⅱ卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带. 不按以上要求作答的答案无效.
4. 填空题请直接填写答案，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

第Ⅰ卷(选择题，共 60 分)

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2<0\}$，$B=\{x\mid e^x<1\}$，则 $A\cup B=$

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(-2,0)$　　D. $(-1,2)$

2. 命题“$\forall x\in(0,+\infty),x^2-2x-3>0$”的否定是

A. $\exists x\in(0,+\infty),x^2-2x-3\leqslant 0$　　B. $\exists x\in(0,+\infty),x^2-2x-3>0$

C. $\forall x\in(-\infty,0],x^2-2x-3>0$　　D. $\forall x\in(0,+\infty),x^2-2x-3\leqslant 0$

3. 记 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_4=4$，$a_6=8$，则 $S_4=$

A. 16　　B. 8　　C. 4　　D. 2

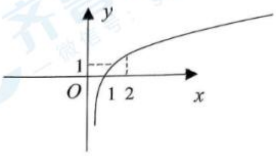
4. 把物体放在冷空气中冷却，如果物体初始温度为 θ_1，空气的温度为 θ_0，那么 t 小时后物体的温度 θ 可由公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$ 求得，其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的冷却系数. 现有 A，B 两个物体放在空气中冷却，已知两物体的初始温度相同，冷却 2 小时后，A，B 两个物体的温度分别为 $4\theta_0$，$7\theta_0$，假设 A，B 两个物体的冷却系数分别为 k_A，k_B，则

A. $k_A-k_B=\frac{1}{2}\ln 2$　　B. $k_B-k_A=\frac{1}{2}\ln 2$　　C. $\frac{k_A}{k_B}=\frac{1}{2}\ln 2$　　D. $\frac{k_B}{k_A}=\frac{1}{2}\ln 2$

5. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=2$，$AA_1=1$，则点 A 到平面 A_1BC 的距离为

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\sqrt{3}$

6. 已知函数 $y=\log_{\frac{b}{a}}x(a>0,b>0)$ 图象如图所示，则二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象顶点的横坐标的取值范围为



A. $(1,2)$　　B. $(-1,-\frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{2},1)$　　D. $(-2,-1)$

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB=2$，$AC=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PA=3$，D 为 PB 的中点，则异面直线 AD 与 PC 所成角的余弦值为

A. $\frac{2\sqrt{15}}{15}$　　B. $\frac{5\sqrt{3}}{12}$　　C. $\frac{5}{14}$　　D. $\frac{9}{13}$

8. 已知函数 $f(x)=ax-(a+3)x^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围为

A. $[-\frac{9}{2},+\infty)$　　B. $(-\infty,9]$　　C. $[-\frac{9}{2},9]$　　D. $(-\frac{9}{2},9)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>b>0$，则下列不等式中正确的是

A. $\frac{a}{b}>1$　　B. $-a^2>-ab$　　C. $\frac{a+1}{b+1}<\frac{a}{b}$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{a-b}$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{ax}{1-x^2}$，则

A. $f(\frac{1}{x})=f(x)$

B. 对任意实数 a，函数 $f(x)$ 为奇函数

C. 存在实数 a，使得 $f(x)$ 为偶函数

D. $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为单调递增函数

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 AD 上的动点，则

A. $A_1B\perp PC_1$

B. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $30°$

C. 有且仅有一个点 P，使得 $BP\perp$ 平面 CC_1P

D. 三棱锥 $B-PCC_1$ 的体积是定值

12. 欧拉函数 $\varphi(n)(n\in N^*)$ 的函数值等于所有不超过正整数 n，且与 n 互质的正整数的个数(公约数只有 1 的两个正整数称为互质整数)，例如：$\varphi(3)=2$，$\varphi(4)=2$，则

A. $\varphi(5)=4$

B. 数列 $\{\varphi(2n)\}$ 单调递增

C. 方程 $\varphi(n)=n-1(n\in N^*)$ 有无数个根

D. 数列 $\{\varphi(5^n)\}$ 的前 n 项和为 5^n-1

第Ⅱ卷(非选择题，共 90 分)

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 不等式 $\dfrac{x-3}{3x+1}\leqslant 0$ 的解集为________.

14. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, x\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, x>0\end{cases}$ 的值域为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，且 $a_{1012}=2$，则 $\log_2 a_1+\log_2 a_2+\cdots+\log_2 a_{2023}=$________.

16. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$A=60°$，沿对角线 BD 折起，使二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $120°$，此时点 A,B,C,D 在同一个球面上，则该球的表面积为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)=2x^2-\ln x+2$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f(x)$ 在其定义域内的一个子集 $(m-2,m+2)$ 内存在极值，求实数 m 的取值范围.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=x-1$，$g(x)=\begin{cases}f(x), x\geqslant 0,\\ -f(x)-2, x<0.\end{cases}$

(1)求证：函数 $g(x)$ 为偶函数；

(2)集合 $A=\{x\mid 2a<x<2-a\}$，$B=\{x\mid g(x)<\dfrac{1}{2}f(x)+2\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

19.（12 分）

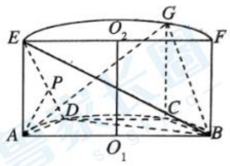
某企业生产了一款新型节能环保产品，决定大量投放市场. 已知该产品年固定研发成本为 150 万元，每生产一台需另投入 380 元. 设该企业一年内生产该产品 x 万台且全部售完，每万台的销售收入 $R(x)$ 万元，且 $R(x)=\begin{cases}500-2x, 0<x\leqslant 20,\\ 370+\dfrac{2140}{x}-\dfrac{6250}{x^2}, x>20.\end{cases}$

(1) 写出年利润 S 万元关于年产量 x 万台的函数解析式（**年利润=年销售收入－成本**）；

(2) 当年产量为多少万台时，该企业获得的利润最大？并求出最大利润.

20.（12 分）

把矩形 O_1O_2FB 以 O_1O_2 所在的直线为轴旋转 180°，得到几何体如图所示. 其中等腰梯形 $ABCD$ 为下底面的内接四边形，且 $AB=2AD=2$，点 G 为上底面一点，且 $CG//O_1O_2$，$O_1O_2=1$.



(1) 若 P 为 DE 的中点，求证：$AP\perp$ 平面 BDE；

(2) 设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DE}$，$\lambda\in[0,1]$，试确定 λ 的值，使得直线 AP 与平面 ABG 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{35}$.

21.（12 分）

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_n+n, n \text{ 为奇数},\\ a_n-2n, n \text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1) 证明：$\{a_{2n}-2\}$ 是等比数列；

(2) 求满足 $S_{2n}>0$ 的所有正整数 n.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2}{e^{x-1}}$，其中 $x>0$.

(1) 若 $a=2$，求函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{e^{x-1}}$ 的单调区间；

(2) 若不等式 $f(x)-\ln x>a$ 对于任意的 $x\in(0,1)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2023-2024 学年高三阶段性监测

数学试题参考答案

2023.10

一、单项选择题

1. B　2. A　3. C　4. A　5. B　6. B　7. D　8. C

二、多项选择题

9. ACD　10. BCD　11. ABD　12. ACD

三、填空题

13. $(-\frac{1}{3},3]$　14. $(0,1]$　15. 2023　16. $\frac{28\pi}{3}$

四、解答题

17. 解：（1）由 $f(x)=2x^2-\ln x+2$ 可得 $f'(x)=4x-\frac{1}{x}$，…………………1 分

所以 $f'(1)=4-\frac{1}{1}=3$, …………………………………………2 分

又 $f(1)=2-0+2=4$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-4=3(x-1)$,

即 $3x-y+1=0$. …………………………………………4 分

（2）$f'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$,

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 时取得极小值，…………………………6 分

由此可得 $\begin{cases} 0\le m-2<\frac{1}{2}, \\ m+2>\frac{1}{2}, \end{cases}$ …………………………8 分

解得 $2 \le m < \frac{5}{2}$. ……………………………………………………10 分

18.解：(1) 可得 $g(x)=\begin{cases} x-1, x \ge 0, \\ -x-1, x<0. \end{cases}$ ……………………………………1 分

当 $x>0$ 时，$-x<0$，
所以 $g(-x)=x-1$，得 $g(-x)=g(x)$，
当 $x<0$ 时，$-x>0$，
所以 $g(-x)=-x-1$，得 $g(-x)=g(x)$，……………………………………4 分
所以 $g(x)$ 为偶函数；………………………………………………………5 分
（2）当 $x \ge 0$ 时，
$x-1<\frac{1}{2}(x-1)+2$，得 $0 \le x<5$，……………………………………6 分
当 $x<0$ 时，
$-x-1<\frac{1}{2}(x-1)+2$，得 $-\frac{5}{3}<x<0$，………………………………7 分
所以 $B=\{x \mid -\frac{5}{3}<x<5\}$，……………………………………………8 分
因为 $B \subseteq A$，
所以 $\begin{cases} 2a \le -\frac{5}{3}, \\ 2-a \ge 5, \end{cases}$ ……………………………………………………10 分
所以 $a \le -3$. ……………………………………………………………12 分

19.解：(1) 当 $0<x \le 20$ 时，$S=xR(x)-380x-150$

$=x(500-2x)-380x-150$

$=-2x^2+120x-150$，……………………………………………………2 分

当 $x>20$ 时，$S=xR(x)-380x-150$

$=x\left(370+\frac{2140}{x}-\frac{6250}{x^2}\right)-380x-150$

$=-10x-\frac{6250}{x}+1990$，…………………………………………………4 分

综上所述 $S=\begin{cases} -2x^2+120x-150, 0<x \le 20, \\ -10x-\frac{6250}{x}+1990, x>20. \end{cases}$ …………………………6 分

（2）当$0<x\le 20$时，$S=-2x^2+120x-150=-2(x-30)^2+1650$，

所以当$x=20$时，S取得最大值1450；……………………………………………8 分

当$x>20$时，$S=-10\left(x+\dfrac{625}{x}\right)+1990\le -10\times 2\sqrt{x\cdot\dfrac{625}{x}}+1990=1490$，

当且仅当$x=\dfrac{625}{x}$，即$x=25$时取等号，此时S的最大值为1490，…………………10 分

因为$1450<1490$，

所以当年产量为 25 万台时，该公司获得的利润最大为 1 490 万元．………………12 分

20.（1）证明：因为AB为直径，

所以$BD\perp AD$，………………………………………………………………………1 分

因为$EA\perp$平面ABD，$BD\subset$平面ABD

所以$EA\perp BD$，

因为$AE\cap AD=A$

所以$BD\perp$平面ADE，……………………………………………………………3 分

因为$AP\subset$平面ADE，所以$BD\perp AP$，

因为$AD=AE$，P为DE的中点，所以$AP\perp DE$，

因为$BD\cap DE=D$，

所以$AP\perp$平面BDE；…………………………………………………………5 分

（2）因为等腰梯形$ABCD$为底面半圆O_1的内接四边形，$AB=2AD=2$，

所以$\angle DAO_1=\angle AO_1D=\angle CO_1D=\angle BO_1C=\dfrac{\pi}{3}$，

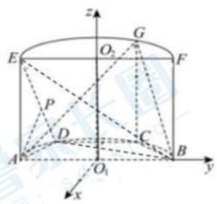
所以$CD=BC=1$，

如图，以O_1为坐标原点，在底面半圆O_1过点O_1垂直于平面$ABFE$作直线为x轴，

以O_1B,O_1O_2为y,z轴建立空间直角坐标系，…………………6 分

3

由于 $AD=DC=BC=1, CG=1$，由（1）可知 $AO_1=1$，



故 $A(0,-1,0), B(0,1,0), G\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right), D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right), E(0,-1,1)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0), \overrightarrow{AG}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},1\right)$，

设平面 ABG 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+z=0,\end{cases}$

令 $x=2\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=(2\sqrt{3},0,3)$，…………………………………………………………7 分

由 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DE}$，$\lambda\in[0,1]$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，

可得 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2},\lambda\right)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2},\lambda\right)$，………………8 分

设直线 AP 与平面 ABG 所成角为 $\theta, \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AP}|}=\frac{|3\lambda-3+0+3\lambda|}{\sqrt{12+0+9}\cdot\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}}=\frac{\sqrt{105}}{35}$，

即得 $9\lambda^2-9\lambda+2=0$，…………………………………………………………………………10 分

解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{2}{3}$，符合 $\lambda\in[0,1]$，

故 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=\frac{2}{3}$……………………………………………………………………12 分

21.解：（1）由已知得 $a_{2n+2}=\frac{1}{2}a_{2n+1}+2n+1=\frac{1}{2}(a_{2n}-4n)+2n+1=\frac{1}{2}a_{2n}+1$，…..2 分

所以 $a_{2n+2}-2=\frac{1}{2}(a_{2n}-2)$，…………………………………………………………3 分

4

其中$a_2=\dfrac{3}{2}$，$a_2-2=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\{a_{2n}-2\}$是以$-\dfrac{1}{2}$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列；……………………………4 分

（2）由（1）知$a_{2n}-2=-\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，

所以$a_{2n}=-(\dfrac{1}{2})^n+2$，……………………………………………………………6 分

$a_{2n-1}=6-4n-(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，……………………………………………………………7 分

所以$a_{2n-1}+a_{2n}=8-4n-3\cdot(\dfrac{1}{2})^n$，……………………………………………………8 分

所以$S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=8n-4(1+2+\cdots+n)-3\left[\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+(\dfrac{1}{2})^n\right]=-2n^2+6n-3+3\times(\dfrac{1}{2})^n$

$=-2(n-\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{3}{2}+3\times(\dfrac{1}{2})^n$，…………………………………………………………10 分

当$n\geq 2$时，$\{S_{2n}\}$单调递减，其中$S_2=\dfrac{5}{2}$，$S_4=\dfrac{7}{4}$，$S_6=-\dfrac{21}{8}$，

所以满足$S_{2n}>0$的所有正整数n为 1，2. ………………………………………………12 分

22.解：（1）因为$a=2$，

所以$g(x)'=x(x-1)(x-4)e^{1-x}$，…………………………………………………………1 分

令$g'(x)=x(x-1)(x-4)e^{1-x}>0$，

解得$x>4$或$0<x<1$，

5

令 $g'(x)=x(x-1)(x-4)e^{1-x}<0$，

解得 $1<x<4$，……………………………………………………………………………3 分

所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1),(4,+\infty)$，递减区间为 $(1,4)$；……………………4 分

（2）设 $h(x)=ax^2e^{1-x}-\ln x-a$，其中 $0<x<1$，

$h'(x)=a(2x-x^2)e^{1-x}-\frac{1}{x}=\frac{a}{x}\left[g(x)-\frac{1}{a}\right]$，……………………………………5 分

由（1）知，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，故 $g(x)\in(g(0),g(1))=(0,1)$，…………6 分

若 $a<0$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减，有 $h(x)>h(1)=0$，符合题意；…7 分

若 $a=0$，$h(x)=-\ln x>0$，符合题意，……………………………………………8 分

若 $\frac{1}{a}\geq 1$，即 $0<a\leq 1$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

有 $h(x)>h(1)=0$，符合题意，……………………………………………………9 分

若 $0<\frac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $g(x_0)=\frac{1}{a}$，

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g(x)>\frac{1}{a}$，故 $h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增，

可得 $h(x)<h(1)=0$，不合题意，……………………………………………………11 分

所以 $a\in(-\infty,1]$……………………………………………………………………12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索