

高三数学参考答案

BCAAD BDCCB 11, ABD 12, ABC 13, ACD

14.3 15.0 16. $-\frac{4}{3}$ 17.2

18. 解: (1) $\because P(1,0)$ 在 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ 的图像上, $\therefore 0 = 1 + a + b$

$$\text{又 } f'(x) = 3x^2 + 2ax,$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } 3x^2 + 2ax = -3 \therefore -3 = 3 + 2a \therefore a = -3, b = 2$$

$$(2) f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \quad \text{若 } f'(x) = 3x^2 - 6x > 0, \text{ 则 } x > 2 \text{ 或 } x < 0$$

$\therefore f(x)$ 分别在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上是增函数, 在 $[0, 2]$ 上是减函数

19. 简解: (1)

$$f(x) = 2 \cos x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2},$$

$f(x)$ 的最小正周期为 $T = \pi$

(2)

$$f(x) = \sin \left(2C + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore \sin \left(2C + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} < 2C + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6}, \quad \therefore 2C + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, C = \frac{\pi}{3} \quad \because \sin B = 2 \sin A, \therefore b = 2a$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } 2\sqrt{3}, \therefore \frac{1}{2} ab \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 8, a = 2, b = 4 \text{ 由余弦定理得 } c = 2\sqrt{3}$$

20. 解: (I) 由题设, $a_n a_{n+1} = \lambda S_n - 1, a_{n+1} a_{n+2} = \lambda S_{n+1} - 1$.

$$\text{两式相减得 } a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = \lambda a_{n+1}.$$

由于 $a_{n+1} \neq 0$, 所以 $a_{n+2} - a_n = \lambda$.

(II) 由题设, $a_1 = 1, a_1 a_2 = \lambda S_1 - 1$, 可得 $a_2 = \lambda - 1$.

由 (I) 知, $a_3 = \lambda + 1$. 令 $2a_2 = a_1 + a_3$, 解得 $\lambda = 4$.

故 $a_{n+2} - a_n = 4$ ，由此可得

$\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1，公差为 4 的等差数列， $a_{2n-1} = 4n - 3$ ；

$\{a_{2n}\}$ 是首项为 3，公差为 4 的等差数列， $a_{2n} = 4n - 1$ 。

所以 $a_n = 2n - 1$ ， $a_{n-1} - a_n = 2$ 。

因此存在 $\lambda = 4$ ，使得数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。

21. 解：(I) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{\left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + 2\cos 2x} = 2|\cos x|,$$

$\because x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore \cos x \geq 0$, $\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = 2\cos x$.

(II) $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + 2|\vec{a} + \vec{b}| = 2\cos^2 x - 1 + 4\cos x = 2(\cos x + 1)^2 - 3$,

$\because x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\therefore 0 \leq \cos x \leq 1$, \therefore 当 $\cos x = 0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1 。

22. 解：(1) 由已知可得 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$ 即 $b_{n+1} = 3b_n$ 。又 $b_1 = 6$ 所以 $b_n = 2 \cdot 3^n$ 。

(2) 由(1)知 $a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^n$ ，所以 $a_{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} = 2(a_n - 2 \cdot 3^n)$ ，令 $c_n = a_n - 2 \cdot 3^n$ ，则 $c_1 = -6$ ， $c_{n+1} = 2c_n$ ，所以 $c_n = -3 \cdot 2^n$ ，所以 $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$ 。

23. 解析：(1) $f'(x) = -2x + \frac{2}{x} = -\frac{2(x+1)(x-1)}{x} (x > 0)$,

由 $\begin{cases} f'(x) > 0, \\ x > 0 \end{cases}$ 得 $0 < x < 1$ ；由 $\begin{cases} f'(x) < 0, \\ x > 0 \end{cases}$ 得 $x > 1$ 。

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为增函数，在 $(1, +\infty)$ 上为减函数。

\therefore 函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = -1$ 。

$$(2) \because g(x) = x + \frac{a}{x}, \therefore g'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}.$$

①由(1)知, $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,

又 \because 函数 $f(x)$ 与 $g(x) = x + \frac{a}{x}$ 有相同极值点, $\therefore x=1$ 是函数 $g(x)$ 的极值点,

$$\therefore g'(1) = 1 - a = 0, \text{ 解得 } a = 1.$$

经验证, 当 $a=1$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 时取到极小值, 符合题意.

$$\textcircled{2} \because f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2} - 2, f(1) = -1, f(3) = -9 + 2\ln 3,$$

$$\text{易知 } -9 + 2\ln 3 < -\frac{1}{e^2} - 2 < -1, \text{ 即 } f(3) < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(1).$$

$$\therefore \forall x_1 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right], f(x_1)_{\min} = f(3) = -9 + 2\ln 3, f(x_1)_{\max} = f(1) = -1.$$

$$\text{由}\textcircled{1}\text{知 } g(x) = x + \frac{1}{x}, \therefore g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

当 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (1, 3]$ 时, $g'(x) > 0$.

故 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ 上为减函数, 在 $(1, 3]$ 上为增函数.

$$\because g\left(\frac{1}{e}\right) = e + \frac{1}{e}, g(1) = 2, g(3) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}, \text{ 而 } 2 < e + \frac{1}{e} < \frac{10}{3}, \therefore g(1) < g\left(\frac{1}{e}\right) < g(3).$$

$$\therefore \forall x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right], g(x_2)_{\min} = g(1) = 2, g(x_2)_{\max} = g(3) = \frac{10}{3}.$$

1° 当 $k-1 > 0$, 即 $k > 1$ 时, 对于 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right]$, 不等式 $\frac{f(x_1) - g(x_2)}{k-1} \leq 1$ 恒成立

$$\Leftrightarrow k-1 \geq [f(x_1) - g(x_2)]_{\max} \Leftrightarrow k \geq [f(x_1) - g(x_2)]_{\max} + 1.$$

$$\because f(x_1) - g(x_2) \leq f(1) - g(1) = -1 - 2 = -3, \therefore k \geq -3 + 1 = -2, \text{ 又 } \because k > 1, \therefore k > 1.$$

2° 当 $k-1 < 0$, 即 $k < 1$ 时, 对于 $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{e}, 3\right]$, 不等式 $\frac{f(x_1)-g(x_2)}{k-1} \leq 1$ 恒成

立 $\Leftrightarrow k-1 \leq [f(x_1)-g(x_2)]_{\min} \Leftrightarrow k \leq [f(x_1)-g(x_2)]_{\min} + 1$.

$\therefore f(x_1)-g(x_2) \geq f(3)-g(3) = -9+2\ln 3 - \frac{10}{3} = -\frac{37}{3} + 2\ln 3$,

$\therefore k \leq -\frac{34}{3} + 2\ln 3$, 又 $\therefore k < 1, \therefore k \leq -\frac{34}{3} + 2\ln 3$.

综上, 所求实数 k 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{34}{3} + 2\ln 3\right] \cup (1, +\infty)$.

自主招生在线创始于 2014 年, 致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2019-2020 学年高三月考试题及参考答案（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/201910/39637.html>